CONCOURS COMMUN SUP 2001
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve spécifique de Mathématiques
(filière MPSI)

vendredi 18 mai 2001 de 08h00 à 12h00

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLEME 1

Dans tout ce problème, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.

La partie I étudie le cas où P est constant.
La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I :

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists b \in \mathbb{R}; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + b\}$.

1) Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = au_n + b$. Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.

2) a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

2) b) Déterminer $E_0^{(0)}$.

Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de 1.

3) Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4) Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.

5) Soit $u \in E_a^{(0)}$.

5) a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 = u_1 \end{cases}$.

5) b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

5) c) Que peut-on en conclure ?

6) Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II :

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\}$.

1) Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par :
$\varphi(P) = \big(P(0), P(1), \ldots, P(p)\big)$).
On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.

2) Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

3) Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

4) Déterminer $\operatorname{Ker}\theta$ (noyau de θ).

5) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.

5) a) Quel est le degré de Q_k ?

5) b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

6) a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \ldots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.

6) b) Que peut-on en conclure ?

7) Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

8) Pour $k \in \{0, 1, \ldots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\quad x_n^{(k)} = n^k$.
On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\quad y_n = a^n$.
Montrer que $(x^{(0)}, \ldots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

9) *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III :

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1) En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + P(n)\}$$

2) *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

PROBLEME 2

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$.

Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
La partie III étudie des propriétés de la fonction f.
La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f.

Partie I :

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1) Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
On montrera que $f(x) = \ln(1+e^x)$.

2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.

3) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f. Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.

4) Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.
En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.

5) Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II :

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)\,dt$.
On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi_x'(u) = \varphi(u)$.

1) Dans cetet question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.

1) a) Montrer que pour x et y réels, $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.

1) b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.

1) c) Que vaut ℓ ?

Dans tout le reste de ce problème, on suppose que $\ell \neq 0$.

2) Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.

3) a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?

3) b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geq t_0$, $\varphi(t) \geq A$.
On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.

3) c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geq x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.

3) d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique.

Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).

Partie III :

1) Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x)+1\big)$ (on pourra admettre les résultats de la question **II) 3)**).

2) En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3) a) On suppose dans cette question **a)**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, montrer que : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}$.

3) b) On suppose dans cette question **b**), qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4) On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$.
Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

4) a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geq a$, $\varphi(t) \geq \dfrac{1}{\varepsilon}$.

4) b) En déduire que si $x \geq a$, $|f(x) - x| \leq \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?

5) Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

6) Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.

6) a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.

6) b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV :

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

1) Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.

2) Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f, en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).