

CONCOURS COMMUN 2003

DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques
(toutes filières)
Mercredi 21 mai 2003 de 14h00 à 18h00

Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Aucun document n'est autorisé
L'emploi d'une calculatrice est interdit

Problème 1

Partie I

Notons $f : t \in \mathbb{R} \mapsto \frac{e^t}{1+t^2}$. Il est clair que f est définie sur \mathbb{R} entier, et que cette fonction est de classe \mathcal{C}^∞ . Nous noterons C_f la courbe représentative de f .

1. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $-\infty$?
2. – Qu'en déduisez-vous au sujet de C_f ?
3. – Complétez chacune des phrases suivantes au moyen de l'une des locutions «est équivalent à», «est négligeable devant», «est dominé par» :

$f(t)$ e^t lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ $\frac{e^t}{t}$ lorsque t tend vers $+\infty$

$f(t)$ $\frac{e^t}{t^2}$ lorsque t tend vers $+\infty$

Lorsque plusieurs réponses sont acceptables, vous donnerez la plus précise. Bien entendu, vous justifierez votre choix.

4. – Quelle est la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$?
5. – Explicitez $f'(t)$.
6. – Dressez le tableau des variations de f .
7. – Explicitez $f''(t)$.
8. – Montrer que l'équation $f''(t) = 0$ possède deux solutions réelles : l'une est évidente, l'autre sera notée α . Vous ne chercherez pas à calculer α .
9. – Prouvez l'encadrement $-\frac{1}{5} < \alpha < 0$.

10. – Expliquez le développement limité de f à l'ordre 3 au voisinage de 0. Que pouvez-vous en déduire concernant C_f ?

11. – Tracez la courbe représentative de f . Vous préciserez son allure au voisinage du point d'abscisse 1.

Partie II

Au vu des expressions de $f(t)$, $f'(t)$ et $f''(t)$, nous nous proposons d'établir que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ suivante est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\text{Il existe un polynôme } P_n \text{ tel que } f^{(n)}(t) = \frac{P_n(t)e^t}{(1+t^2)^{n+1}} \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}$$

Vous allez raisonner par récurrence sur n .

Remarque : vous pouvez confondre polynôme et fonction polynomiale.

12. – Il est clair que $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour $n \in \{0, 1, 2\}$; vous dresserez simplement un tableau donnant l'expression de P_n pour ces valeurs de n .

13. – Fixons $n \in \mathbb{N}$, et supposons l'assertion $\mathcal{A}(n)$ acquise. Établissez l'assertion $\mathcal{A}(n+1)$; vous déterminerez l'expression de P_{n+1} en fonction de P_n et P'_n .

Il résulte donc des questions 12 et 13 que l'assertion $\mathcal{A}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

14. – Montrez que P_n a tous ses coefficients dans \mathbb{Z} .

15. – Précisez le degré et le coefficient dominant de P_n .

16. – Donnez une expression simple de $c_n = P_n(i)$, où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

Partie III

Notons $F : x \in \mathbb{R} \mapsto \int_0^x f(t) dt$. Ainsi, F est la primitive de f qui s'annule en 0.

17. – Quel est le sens de variation de F ?

18. – Montrez que $F(x)$ possède une limite ℓ finie lorsque x tend vers $-\infty$. Vous ne cherchez pas à expliciter cette limite.

19. – Prouvez l'encadrement $-1 \leq \ell \leq 0$.

20. – Donnez une équation de la tangente à la courbe représentative de F , au point d'abscisse 0.

21. – Expliquez le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de 0.

Nous nous proposons d'étudier le comportement de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Nous noterons

$$J(x) = \int_1^x \frac{te^t}{(1+t^2)^2} dt, \quad K(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^3} dt \quad \text{et} \quad L(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t^4} dt.$$

22. – Prouvez l'existence d'une constante A telle que $F(x) = f(x) + A + 2J(x)$ pour tout réel x .

23. – Pour $x \geq 1$, placez les uns par rapport aux autres les réels 0, $J(x)$ et $K(x)$.

24. – Avec une intégration par parties soigneusement justifiée, montrez que $K(x) - 3L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

25. – En découpant l'intervalle $[1, x]$ sous la forme $[1, x^{3/4}] \cup [x^{3/4}, x]$, montrez que $L(x)$ est négligeable devant $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

26. – En déduire un équivalent simple de $F(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

27. – Exploitez les résultats des questions **17**, **19**, **20** et **26** pour donner l'allure de la courbe représentative de F .

Problème 2

Partie I

Notons E le \mathbb{R} -espace vectoriel des applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^∞ et $\mathbf{D} : f \in E \mapsto f'$. Il est clair que \mathbf{D} est un endomorphisme de E .

1. – Déterminez le noyau et l'image de \mathbf{D} .

Soient $f_1 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^t$, $f_2 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \sin\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$ et $f_3 : t \in \mathbb{R} \mapsto e^{-t/2} \cos\left(\frac{t\sqrt{3}}{2}\right)$. Nous noterons $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ et G le sous-espace vectoriel de E engendré par \mathcal{B} .

Nous allons montrer que \mathcal{B} est une famille libre de vecteurs de E . Soient a, b et c des réels tels que $af_1 + bf_2 + cf_3$ soit la fonction nulle.

2. – L'étudiante Antoinette observe que $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t) = 0$ pour tout réel t . Elle choisit (adroitement) trois valeurs de t , obtient un système de trois équations aux trois inconnues a, b et c , qu'elle résout ; il ne lui reste plus qu'à conclure. Faites comme elle !

3. – L'étudiante Lucie propose d'exploiter le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $af_1 + bf_2 + cf_3$ au voisinage de 0. Faites comme elle !

4. – L'étudiante Nicole décide de s'intéresser au comportement de $af_1(t) + bf_2(t) + cf_3(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Faites comme elle !

La famille \mathcal{B} est donc une base de G , et ce sous-espace est de dimension 3.

5. – Montrez que G est stable par \mathbf{D} .

Nous notera $\widehat{\mathbf{D}}$ l'endomorphisme de G induit par \mathbf{D} .

6. – Déterminez la matrice M de $\widehat{\mathbf{D}}$ dans la base \mathcal{B} .

7. – Calculer M^3 .

8. – Montrez que M est inversible, et explicitez son inverse M^{-1} .

9. – Montrez que $\widehat{\mathbf{D}}$ est un automorphisme de G .

10. – Exprimez $(\widehat{\mathbf{D}})^{-1}$ en fonction de $\widehat{\mathbf{D}}$.

Partie II

Soient g et h deux éléments de G . Définissons $\varphi(g, h) = g(0)h(0) + g'(0)h'(0) + g''(0)h''(0)$.

11. – Dressez un tableau à trois lignes et quatre colonnes ; pour $1 \leq i \leq 3$, la ligne i présentera les valeurs de $i, f_i(0), f_i'(0)$ et $f_i''(0)$ dans cet ordre. Vous ne ferez pas apparaître le détail des calculs sur votre copie.

12. – Montrez que φ est un produit scalaire sur G .

13. – La base \mathcal{B} est-elle orthogonale ?

14. – La base \mathcal{B} est-elle orthonormée ?

Partie III

Nous nous intéressons dans cette partie à l'équation différentielle $y''' = y$, que nous noterons (\mathcal{E}) . Une solution sur \mathbb{R} de (\mathcal{E}) est une fonction f définie et trois fois dérivable sur \mathbb{R} , vérifiant $f'''(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

15. – Montrez que toute solution f de (\mathcal{E}) est de classe \mathcal{C}^∞ .

16. – Montrez que la fonction nulle est la seule solution polynomiale de (\mathcal{E}) .

Notons $\mathbf{T} = \mathbf{D}^3 - \mathbf{Id}$, où \mathbf{Id} est l'identité de E , et $\mathbf{D}^3 = \mathbf{D} \circ \mathbf{D} \circ \mathbf{D}$. Le noyau de \mathbf{T} est donc l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) .

17. – Montrez que G est contenu dans le noyau de \mathbf{T} .

Nous allons établir l'inclusion inverse ; ainsi, G sera exactement l'ensemble des solutions de (\mathcal{E}) . Soit f une solution de (\mathcal{E}) ; nous noterons $g = f'' + f' + f$.

18. – Montrez que g est solution de l'équation différentielle $y' = y$.

19. – Décrivez rapidement l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$.

20. – Résolvez l'équation différentielle $y'' + y' + y = 0$; vous donnerez une base de l'ensemble des solutions.

21. – Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Décrivez l'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y'' + y' + y = \lambda e^t$.

22. – Et maintenant, concluez !

FIN