CONCOURS COMMUN 1996
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques

Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MP, PC, PT, PSI)

Mardi 21 mai 1996 de 8h00 à 12h00

Instructions :

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PROBLÈME 1

1/ Soit la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $B = A^2$, $C = A^3$, $A + C$ et $U = A^4$.

2/ Montrer que $(\{U, A, B, C\}, \times)$, où $\times$ est le produit matriciel, forme un groupe commutatif.

3/ E désigne un espace vectoriel euclidien orienté, sur le corps des réels, de dimension 3, rapporté à la base orthonormale directe $\mathcal{H} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On appelle a, b, c et u les endomorphismes de E associés respectivement à A, B, C et U.

a/ Montrer que le noyau de u, noté $Ker(u)$, est une droite vectorielle, dont on donnera une base normée $(\overrightarrow{e_1})$, la première coordonnée de $\overrightarrow{e_1}$ étant positive.

b/ Déterminer une équation cartésienne de l'image de u, notée $Im(u)$. Vérifier que $Im(u)$ est un plan vectoriel orthogonal à $Ker(u)$.

c/ Donner la nature géométrique de u.

d/ Déterminer un vecteur normé $\overrightarrow{e_2}$ de $Im(u)$, puis $\overrightarrow{e_3}$ tel que $\mathcal{H}' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ soit une nouvelle base orthonormale directe de E.

Donner alors la matrice U' de u dans la base $\mathcal{H}'$.

4/

a/ Déterminer les matrices A', B', C', respectivement de a, b, c dans la base $\mathcal{H}'$.

b/ Montrer que a, b, c, peuvent se décomposer chacun en deux endomorphismes usuels que l'on précisera.

5/ On rappelle que l'ensemble $\mathcal{C}_1$, des fonctions numériques à variable réelle, continûment dérivables sur l'ensemble des réels, muni de l'addition et de la multiplication par des réels, est un espace vectoriel sur le corps des réels.

Soient φ_0, φ_1, φ_2, les éléments de $\mathcal{C}_1$ tels que $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = \sin(x)$, $\varphi_2(x) = \cos x$.

a/ Montrer que $\phi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2)$ est une famille libre de $\mathcal{C}_1$.

b/ $\mathcal{E}$ est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_1$ de base ϕ. A chaque élément φ de $\mathcal{E}$, on associe sa fonction dérivée $d(\varphi)$.

Montrer que d est un endomorphisme de $\mathcal{E}$; en donner la matrice D dans la base ϕ.

Comparer D et A'.

PROBLÈME 2

Dans ce problème, m, n, p et q désignent des entiers naturels.

1/ Pour $n \geq 1$, on considère les suites (u_n), (u'_n) et (u''_n) définies par :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad u'_n = u_{2n} \qquad u''_n = u_{2n-1}$$

a/ Déterminer u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6, u'_1, u'_2, u'_3, u''_1, u''_2 et u''_3.

b/ Calculer, en fonction de n, $u'_{n+1} - u'_n$, $u''_{n+1} - u''_n$, $u''_n - u'_n$.

Qu'en déduit-on pour les suites (u'_n) et (u''_n) ?

c/ Montrer que la suite (u_n) converge.

2/ Etudier la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par :

$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

3/ On considère, pour tout $p \geq 0$ les intégrales $I_p = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\,dx$

a/ Calculer I_0 et I_1.

b/ Calculer $I_p + I_{p+2}$ en fonction de p. En déduire I_2 et I_3.

4/ Montrer que, pour $q \geq 1$:

a/ $u_q + 2(-1)^q I_{2q+1} = \ln(2)$

b/ $v_q + (-1)^q I_{2q} = \dfrac{\pi}{4}$

5/

a/ Déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} I_p$.

b/ Préciser les limites des suites (u_n) et (v_n).

6/ Au moyen d'une intégration par parties, déterminer $\lim\limits_{p \to +\infty} (pI_p)$.

7/ Soit $J_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^p}{(1+x^2)^q}\,dx$

a/ Calculer $J_{1,q}$ en fonction de q.

b/ Donner les valeurs de $J_{0,q}$ pour $0 \leq q \leq 3$.

c/ On dit que $J_{m,n}$ précède $J_{p,q}$ si et seulement si ($m \leq p$ et $n < q$) ou ($m < p$ et $n \leq q$). Pour $p \geq 2$ et $q \geq 1$, donner $J_{p,q}$ en fonction de deux intégrales qui la précèdent.

d/ Donner toutes les valeurs des $J_{p,q}$ pour $0 \leq p \leq 3$ et $0 \leq q \leq 3$.