CONCOURS COMMUN 1997
DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

Épreuve de Mathématiques

Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MP, PC, PT, PSI)

Mercredi 21 mai 1997 de 14h00 à 18h00

Instructions :

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

PREMIER PROBLÈME

PARTIE I : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie sur $\left]-\dfrac{1}{2},+\infty\right[$ par :

$$\begin{cases} \text{pour } x \text{ dans } \left]-\dfrac{1}{2},0\right[\cup \left]0,+\infty\right[, & f(x)=\dfrac{\ln(1+2x)}{x}-1 \\ & f(0)=1 \end{cases}$$

1 - Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f(x)$ au voisinage de 0.

2 - a) Montrer que f est continue sur son ensemble de définition.

b) Montrer que f est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

c) Etudier les variations de f.
On montrera en particulier que f s'annule en un unique point α dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près (en expliquant comment elle est obtenue).

3 - Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé (unité : 2 cm).

PARTIE II : Étude d'une suite convergeant vers α

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que : $u_0>0$ et pour tout n dans $\mathbb{N}$: $u_{n+1}=\ln(1+2u_n)=g(u_n)$.

1 - Vérifier que u_n est bien défini pour tout n dans $\mathbb{N}$.

2 - On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Que vaut alors sa limite L ?

3 - a) On suppose que u_0 est dans l'intervalle $]0,\alpha]$.
Montrer que, alors, pour tout n, u_n est dans l'intervalle $]0,\alpha]$.

Puis montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et convergente vers α.

b) Montrer, de manière analogue, que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge aussi vers α si on suppose u_0 dans $]\alpha, +\infty[$.

4 - On pose $u_0 = 1$.

a) Montrer que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Au vu de cette majoration, à partir de quel rang n est-on sûr que u_n représente une valeur approchée de α à 10^{-4} près ?

PARTIE III : Étude d'une primitive de f

On pose, pour x dans $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ dt$.

1 - Etudier les variations de F (sans chercher à savoir, pour l'instant, si $F(x)$ a une limite quand x tend vers $-\frac{1}{2}$ ou $+\infty$).

2 - Montrer que $F(x)$ est équivalent à x quand x tend vers 0.

3 - Montrer que $F(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

4 - a) Montrer que, pour t dans $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$, on a : $\ln(1+2t) \geq \frac{-1}{\sqrt{1+2t}}$ puis : $f(t) \leq \frac{4}{\sqrt{1+2t}} - 1$

b) En déduire que l'expression $F(x) - F\left(-\frac{1}{4}\right)$ est minorée sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right]$

c) Prouver que F est prolongeable par continuité à droite en $-\frac{1}{2}\cdot$ (on ne cherchera pas à calculer la valeur de F ainsi prolongée en ce point ; on la notera seulement L_1)

d) F, ainsi prolongée, est-elle alors dérivable à droite en $-\frac{1}{2}$?

5 - En admettant que $L_1 = -1{,}14$ à 10^{-2} près, donner l'allure de la courbe représentative de F (sur le même repère que celle de f), l'étude de la branche infinie n'étant pas demandée.

DEUXIÈME PROBLÈME

F est l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Questions préliminaires :

Soit ψ l'application, définie sur F, qui, à une fonction f, associe sa dérivée f' :

a) Montrer que ψ est un endomorphisme de F.

b) Est-ce un automorphisme ?

On considère le sous-ensemble E de F des fonctions de la forme :

$$x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x$$

où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{R}_1[X]$ (c'est-à-dire de degré inférieur ou égal à 1 et à coefficients réels).

1 - Montrer que E est un sous-espace vectoriel de F, de base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où $f_1 : x \mapsto \sin x$; $f_2 : x \mapsto x\sin x$; $f_3 : x \mapsto \cos x$; $f_4 : x \mapsto x\cos x$.

2 - D est la restriction de ψ à E.

a) Montrer que D est un endomorphisme de E et donner sa matrice M dans la base $\mathcal{B}$.

b) Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$. En déduire que D est une bijection de E sur E.

3 - λ est un réel, Id_E est l'application identique de E.

a) Déterminer, selon les valeurs de λ, le rang de $D^2 - \lambda \mathrm{Id}_E$.

b) Déterminer une base et la dimension du noyau et de l'image de $D^2 + \mathrm{Id}_E$.

c) En déduire que $D^4 + 2D^2 + \mathrm{Id}_E$ est l'application nulle de E.

d) Retrouver alors que D est bijective et calculer D^{-1} en fonction de D.

4 - On note V le sous-espace de $\mathcal{L}(E)$ engendré par Id_E et D^2.

a) Vérifier que V est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(E)$.

b) Soit G l'ensemble des éléments inversibles de V.
Montrer que G est l'ensemble des éléments de la forme : $\alpha \mathrm{Id}_E + \beta D^2$ où $\alpha \neq \beta$.

c) G constitue-t-il un groupe pour la loi de composition des applications ?

5 - a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' + y = 0$.

b) Déterminer le noyau de $\psi^2 + \mathrm{Id}_F$.

c) Montrer que le noyau de $(\psi^2 + \mathrm{Id}_F)^2$ est E. Puis montrer que E est exactement l'espace des solutions de l'équation différentielle :

$$y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0.$$