

# CONCOURS COMMUN 1997

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

### Épreuve spécifique de Mathématiques

Classements SUP (MPSI, PCSI, PTSI) et SPE (MP, PC, PT, PSI)

Jeudi 22 mai 1997 de 08h00 à 12h00

#### Instructions :

Les candidats doivent traiter les problèmes 1 et 2 qui sont indépendants.

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

### PREMIER PROBLÈME

Dans tout ce problème,  $\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 4, et soit  $B = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  une base de  $E$ .

On considère les vecteurs :

$$f_1 = e_1 + e_2 - e_3 + e_4$$

$$f_2 = e_1 + e_3$$

$$f_3 = -e_1 + e_2 + e_3 + e_4$$

$$f_4 = e_2 - e_4.$$

Soit  $s$  l'endomorphisme de  $E$  ayant pour matrice dans la base  $B$  :

$$S = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Vérifier que  $s$  est la symétrie par rapport au plan  $F$  de base  $(f_1, f_2)$ , parallèlement au plan  $G$  de base  $(f_3, f_4)$ .

Déterminer sans calcul la matrice  $S^{-1}$ .

2. Pour tout entier  $i$  compris entre 1 et 4, on pose  $e'_i = s(e_i)$ .

Soit  $B' = (e'_1, e'_2, e'_3, e'_4)$ .

Justifier le fait que  $B'$  est une base de  $E$ .

3. Soient  $a$  et  $b$  deux réels. On note  $u_{a,b}$  l'endomorphisme de  $E$  ayant pour matrice dans la base  $B'$  :

$$D(a, b) = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (a-b)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 - b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 - b^2 \end{pmatrix}.$$

- a) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur  $a$  et  $b$  pour que  $u_{a,b}$  soit inversible.
- b) Lorsque cette condition est remplie, déterminer la matrice de  $[u_{a,b}]^{-1}$  dans la base  $B'$ .  
(On calculera ses coefficients et on l'exprimera à l'aide de  $D(a, -b)$ ).
4. Soit  $M(a, b)$  la matrice de  $u_{a,b}$  dans la base  $B$ .  
Montrer que  $M(a, b) = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{pmatrix}$ . (On justifiera et on détaillera les calculs).
- On désigne désormais par  $L$  l'ensemble des matrices  $M(a, b)$  quand  $(a, b)$  décrit  $\mathbb{R}^2$ .**
5. a) Calculer  $[M(a, b)]^{-1}$  lorsque  $M(a, b)$  est inversible et montrer que  $[M(a, b)]^{-1}$  appartient à  $L$ .  
b) Montrer que si  $(a, b)$  et  $(a', b')$  sont des couples de réels, alors il existe un couple  $(a'', b'')$  de réels tel que :  $M(a, b) \times M(a', b') = M(a'', b'')$ .
6. Les fonctions  $\text{ch}$  et  $\text{sh}$  sont les fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique.  
Si  $t$  est un réel, on pose  $N(t) = M(\text{ch}(t), \text{sh}(t))$  et on note  $L'$  l'ensemble des matrices  $N(t)$  quand  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ .  
Montrer que  $L'$  est un sous-groupe commutatif de  $GL_4(\mathbb{R})$  (groupe des matrices réelles inversibles d'ordre 4) et que l'application  $N$  de  $\mathbb{R}$  dans  $L'$  qui à  $t$  associe  $N(t)$  est un isomorphisme de groupes.
7. Quelle structure algébrique possède l'ensemble  $GL_4(\mathbb{R}) \cap L$  ?
8. Déterminer  $O(4) \cap L$  où  $O(4)$  est l'ensemble des matrices réelles orthogonales d'ordre 4.  
(On rappelle qu'une matrice  $A$  est orthogonale si elle vérifie :  ${}^t A \times A = I_4$  où  ${}^t A$  désigne la matrice transposée de la matrice  $A$ , et où  $I_4$  est la matrice unité d'ordre 4.)

## DEUXIÈME PROBLÈME

Dans tout ce problème,  $\mathbb{N}$  désigne l'ensemble des nombres entiers naturels, et  $\mathbb{R}$  l'ensemble des nombres réels.

### PARTIE A

**On considère l'équation différentielle :  $y' + 2xy = 1$ .**

1. De quel type d'équation différentielle s'agit-il ?  
On désigne désormais par  $f$  l'une de ses solutions sur  $\mathbb{R}$ , **que l'on ne cherchera pas à exprimer pour l'instant.**
2. a) Prouver que  $f$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Quelle est la valeur de  $f'(0)$  ?
3. Montrer que :  $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, f^{(n+2)}(x) = -2x f^{(n+1)}(x) - 2(n+1)f^{(n)}(x)$ .
4. a) Montrer que  $f$  admet en 0 un développement limité à tout ordre  $p$  ( $p$  entier naturel). Écrivons un tel développement limité au moyen d'une suite de réels  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ :

$$f(x) = \sum_{k=0}^p a_k x^k + o(x^p).$$

- b) À l'aide du résultat de la question 3, montrer que :  $\forall k \in \mathbb{N}, a_{2k+1} = \frac{(-4)^k \cdot k!}{(2k+1)!}$ .
- c) Obtenir également l'expression des termes  $a_{2k}$  à l'aide de  $f(0)$  ( $k$  entier naturel).

### **PARTIE B**

On considère la fonction de la variable réelle  $D : x \mapsto D(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt$ .

1. Justifier le fait que  $D$  est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et vérifier que  $D$  est une solution sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y' + 2xy = 1$ .
2. Etudier la parité de  $D$ .
3. Prouver<sup>1</sup> que :  $\forall x \in \mathbb{R}^+, xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$ .
4. a) Prouver que :  $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} + \frac{e^{x^2}}{4x^3} - \frac{3e}{4} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt$ .
- b) Soit la fonction  $h : t \mapsto \frac{e^{t^2}}{t^2}$ . Montrer que  $h$  est croissante sur  $[1, +\infty[$ . En déduire que :

$$\forall x \in [1, +\infty[, \int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^4} dt \leq h(x) \int_1^x \frac{1}{t^2} dt,$$

et qu'au voisinage de  $+\infty$  :  $\int_1^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$ .

En déduire enfin un équivalent de  $D(x)$  au voisinage de  $+\infty$ .

5. a) Prouver que  $D$  admet un maximum, atteint en un point  $b$  de  $\mathbb{R}^{+*}$ .
- b) Montrer que ce maximum est égal à  $\frac{1}{2b}$ .
- c) En déduire l'unicité du point où le maximum est atteint.

### **PARTIE C**

1. Déterminer à l'aide de  $D$  l'ensemble des fonctions solutions sur  $\mathbb{R}$  de l'équation différentielle :  $y' + 2xy = 1$ .
2. Montrer l'existence d'une unique solution impaire.

---

<sup>1</sup> L'énoncé d'origine demandait de prouver que  $\forall x \in \mathbb{R}, xe^{-x^2} \leq D(x) \leq x$ , ce qui est faux.