

# CONCOURS COMMUN SUP 1999

## DES ÉCOLES DES MINES D'ALBI, ALÈS, DOUAI, NANTES

---

### Épreuve spécifique de Mathématiques (filière MPSI)

Judi 27 mai 1999 de 08h00 à 12h00

#### Instructions générales :

Les candidats sont invités à porter une attention particulière à la rédaction : les copies illisibles ou mal présentées seront pénalisées.

Aucun document n'est autorisé

#### PREMIER PROBLÈME

$\mathbb{R}$  désigne l'ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}_n[X]$  désigne l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Si  $P$  est un polynôme on notera  $P'$  son polynôme dérivé.

Si  $P$  est un polynôme on notera également  $P$  sa fonction polynôme associée.

#### I. Etudes d'endomorphismes donnés par leur matrice

1. Soit  $u$  et  $v$  deux réels. Soit  $f$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_2[X]$  ayant pour matrice sur la base canonique  $(1, X, X^2)$  la matrice  $A$  suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -u & v & 0 \\ -2 & 0 & 2v \\ 0 & -1 & u \end{pmatrix}$$

- 1a. Calculer le déterminant de  $f$  en justifiant votre réponse.
- 1b. Déterminer une base du noyau de  $f$ .
- 1c. Déterminer une base de l'image de  $f$ .
2. Soit  $w$  un réel. Soit  $g$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}_3[X]$  ayant pour matrice sur la base canonique  $(1, X, X^2, X^3)$  la matrice  $B$  suivante :

$$B = \begin{pmatrix} -3 & w & 0 & 0 \\ -3 & -1 & 2w & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3w \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

- 2a. Calculer le déterminant de  $g$  en justifiant votre réponse.

On notera  $w_0$  la valeur qui annule ce déterminant.

**2b.** Déterminer lorsque  $w = w_0$  une base du noyau de  $g$ .

## II. Définition d'une application linéaire, exemples et propriétés

Soit  $n$  un entier supérieur ou égal à 2,  $Q$  un polynôme de degré 2 et  $\varphi$  l'application définie sur  $\mathbb{R}_n[X]$  par :  $\varphi(P) = 2P'Q - nPQ'$ .

### A Etude de cas particuliers

**1.** Montrer que  $\varphi$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**2.** Soit  $u$  et  $v$  deux réels. On suppose dans cette question que  $n = 2$  et que :  $Q = X^2 + uX + v$ .

**2a.** Déterminer la matrice de  $\varphi$  sur la base canonique de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

**2b.** Déterminer le noyau de  $\varphi$  en fonction de  $Q$ .

**3.** Soit  $w$  un réel. On suppose dans cette question que  $n = 3$  et que :  $Q = X^2 + 2X + w$ .

**3a.** Déterminer la matrice de  $\varphi$  sur la base canonique de  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**3b.** Déterminer suivant les valeurs de  $w$  le noyau de  $\varphi$ .

### B Etude du cas général

**1.** On suppose que  $Q$  n'admet pas de racine double.

**1a.** Que peut-on dire du PGCD de  $Q$  et de  $Q'$  ?

**1b.** Dédurre de la question précédente que si  $P$  est un polynôme non nul appartenant au noyau de  $\varphi$  alors  $Q$  divise  $P$ .

**1c.** Montrer que si  $P$  est un polynôme non nul appartenant au noyau de  $\varphi$ , il existe un entier  $k$  non nul et un polynôme  $R$  non nul, tels que  $P = RQ^k$  et tels que  $Q$  ne divise par  $R$ .

**1d.** Dédurre de la question précédente que si le noyau de  $\varphi$  n'est pas réduit au polynôme nul alors  $n$  est pair.

**1e.** Déterminer suivant les valeurs de  $n$  le noyau de  $\varphi$ .

**2.** On suppose que  $Q$  possède une racine double  $\alpha$ .

**2a.** Montrer que si  $P$  est un polynôme non nul appartenant au noyau de  $\varphi$  alors  $\alpha$  est racine de  $P$ .

**2b.** Donner le noyau de  $\varphi$ .

(On pourra utiliser l'ordre de multiplicité de la racine  $\alpha$ ).

**3.** Dans cette question, on supposera  $n$  **impair**.

Soit  $P$  un polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$ . Montrer qu'il existe un polynôme  $R$  de  $\mathbb{R}_n[X]$  unique tel que :  $P = (X^2 + 1)R' - nXR$ .

Justifier que l'application :  $\psi : P \mapsto R$  ainsi définie est linéaire.

## DEUXIÈME PROBLÈME

- I. Soit la fonction  $\varphi$  définie par :  $\varphi(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ .
- Déterminer l'ensemble de définition de  $\varphi$ .
  - Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur son ensemble de définition et déterminer sa dérivée.
  - Etudier le signe de  $\varphi'(x)$ .
  - Déterminer les limites de  $\varphi$  aux bornes de son ensemble de définition.
  - Montrer que  $\varphi$  peut être prolongée par continuité en 0 en une fonction que l'on notera également  $\varphi$ . Montrer que cette fonction ainsi prolongée est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur son ensemble de définition.
  - Déterminer le tableau de variation de  $\varphi$  et tracer sa courbe représentative.
- II. Soit  $f$  une fonction définie continue et **positive** sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- Soit la fonction  $g$  définie par :  $g(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1+x \sin t} dt$ .
- Montrer que  $g$  est définie sur  $] -1, +\infty[$ .
  - On suppose dans cette question que :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(t) = \cos t$ . Calculer  $g(x)$ .
  - On suppose dans cette question que :  $\forall t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], f(t) = \sin(2t)$ . Calculer  $g(x)$ .
  - Soit  $a$  un réel supérieur strictement à  $-1$ . Montrer qu'on peut trouver un réel  $K$  tel que :  $\forall (x, y) \in ]a, +\infty[^2, |g(x) - g(y)| \leq K|x - y|$ . En déduire que la fonction  $g$  est continue sur  $] -1, +\infty[$ .
  - Montrer, sans utiliser la dérivabilité, que  $g$  est décroissante sur  $] -1, +\infty[$ .
  - Montrer que la fonction  $f$  est majorée sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .
  - Soit  $M$  un majorant de  $f$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .  
Montrer que :  $\forall x > 0, g(x) \leq Mb + \frac{M\pi}{2(1+x \sin b)}$ .
  - En déduire la limite de la fonction  $g$  en  $+\infty$ .
  - La fonction  $t \mapsto \frac{\cos t}{1 - \sin t}$  est-elle intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  ?
  - Montrer que  $g$  admet une limite  $L$  finie ou infinie en  $-1$ .
  - On admettra que si la fonction  $t \mapsto \frac{f(t)}{1 - \sin t}$  est intégrable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  alors  $L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{1 - \sin t} dt$  et sinon  $L = +\infty$ . Retrouver le résultat de la question 7.
  - Donner le tableau de variations de  $g$ .