SESSION 2002

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan)

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Dans ce problème, tous les espaces vectoriels sont de dimension finie. Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, la quantité $< x, y >$ désignera toujours le produit scalaire usuel $< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i$. Si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normé (en abrégé : evn), on rappelle que l'espace dual E^* est munit canoniquement d'une norme (dite *duale*) définie par $\|f\| := \sup_{\|x\|=1} |f(x)|$. L'espace dual E^* muni de cette norme sera appelé le *dual normé* de E.

Un evn E est dit *isométrique* à un evn F si il existe un isomorphisme linéaire $f : E \to F$ préservant les normes, c'est-à-dire tel que $\|f(x)\|_F = \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Une telle f est appelée *isométrie* de E dans F.

Si $p = 1$ ou 2, on note ℓ_n^p l'espace $\mathbf{R}^n$, muni de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. De même, on note ℓ_n^∞ l'espace $\mathbf{R}^n$ muni de la norme $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \sup_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Première partie : introduction.

Si $y \in \mathbf{R}^n$, on définit $\varphi_y : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ par

$$\varphi_y(x) :=< x, y >= \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

C'est donc un élément du dual $(\mathbf{R}^n)^*$ de $\mathbf{R}^n$.

1-a) Si $x \in \mathbf{R}^n$, montrer que l'on peut trouver $y \in \mathbf{R}^n$ avec $\|y\|_2 = 1$, et $\varphi_x(y) = \|x\|_2$.

b) Si $x \in \mathbf{R}^n$, montrer que l'on peut trouver $y \in \mathbf{R}^n$ avec $\|y\|_\infty = 1$, et $\varphi_x(y) = \|x\|_1$.

c) Si $x \in \mathbf{R}^n$, montrer que l'on peut trouver $y \in \mathbf{R}^n$ avec $\|y\|_1 = 1$, et $\varphi_x(y) = \|x\|_\infty$.

2) Montrer que l'application $x \mapsto \varphi_x$ fournit une isométrie entre ℓ_n^2 et son dual normé, une isométrie de ℓ_n^1 sur le dual normé de ℓ_n^∞, et enfin une isométrie de ℓ_n^∞ sur le dual normé de ℓ_n^1.

3-a) Si $x, y \in \mathbf{R}^n$, montrer que

$$\|x + y\|_2^2 + \|x - y\|_2^2 = 2\|x\|_2^2 + 2\|y\|_2^2.$$

b) En déduire que si x et y vérifient $\|x\|_2 = \|y\|_2 = \|\frac{x+y}{2}\|_2$, alors $x = y$.

c) En déduire que, pour $n \geq 2$, ℓ_n^2 n'est isométrique ni à ℓ_n^1, ni à ℓ_n^∞.

4) Si $A \subset B \subset \mathbf{R}^n$, on rappelle que A est dit *dense* dans B si B est inclus dans l'adhérence $\overline{A}$ de A, ou encore si tout élément de B est limite d'une suite d'éléments de A.

a) Montrer que si U et V sont deux ouverts denses de $\mathbf{R}^n$, alors $U \cap V$ est encore dense dans $\mathbf{R}^n$.

b) Soit E un sous-espace vectoriel strict de $\mathbf{R}^n$ (i.e. avec $\dim E < n$). Montrer que le complémentaire $\mathbf{R}^n - E$ de E dans $\mathbf{R}^n$ est un ouvert dense de $\mathbf{R}^n$. [Indication : utiliser une base convenable.]

c) Si $E_1, \ldots, E_k$ sont des sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E, et si $E = \cup_{i=1}^k E_i$, montrer que l'un au moins des E_i est égal à E.

5) Soit E un sous-espace de dimension n de ℓ^∞_m. On suppose que $m \geq n \geq 2$.

a) On suppose que E possède (au moins) un élément $a = (a_1, \dots, a_n)$ tel que les $|a_i|$ soient deux à deux distincts. Montrer qu'il existe $x \neq y \in E$, avec

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|\frac{x+y}{2}\|_\infty = 1.$$

[Indication : prendre $x = \frac{a}{\|a\|_\infty}$, et choisir y assez proche de x.]

b) Si E ne possède pas d'éléments comme ci-dessus, montrer qu'alors E est contenu dans un sous-espace de ℓ^∞_m, isométrique à ℓ^∞_{m-1}.

c) Montrer qu'il existe nécessairement $x \neq y \in E$, avec

$$\|x\|_\infty = \|y\|_\infty = \|\frac{x+y}{2}\|_\infty = 1.$$

d) En déduire que ℓ^2_n, lorsque $n \geq 2$, n'est isométrique à aucun sous-espace de ℓ^∞_n avec m fini. Qu'en est-il pour $n = 1$?

6) On note $\ell^\infty_{\mathbf{N}}$ l'espace des suites $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ avec $x_n \in \mathbf{R}$ et $\sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n| < \infty$. L'espace $\ell^\infty_{\mathbf{N}}$ est clairement un espace vectoriel pour les addition et multiplication scalaire standards, et normé pour la norme $\|(x_n)_{n\in\mathbf{N}}\| := \sup_{n\in\mathbf{N}} |x_n|$.

a) Montrer que l'on peut trouver une suite $(x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ avec $x_k \in \mathbf{R}^n$ et $\|x_k\|_2 = 1$ pour tout k, telle que $\{x_k; k \in \mathbf{N}\}$ soit dense dans la sphère unité euclidienne $\{x \in \mathbf{R}^n; \|x\|_2 = 1\}$ de $\mathbf{R}^n$.

b) En déduire qu'il existe une application linéaire $f : \ell^2_n \to \ell^\infty_{\mathbf{N}}$ isométrique sur son image, c'est-à-dire telle que $\|f(x)\|_\infty = \|x\|_2$ pour tout $x \in \ell^2_n$.

Deuxième partie : distance entre evn.

Si E et F sont deux evn de même dimension, on pose

$$\rho(E,F) := \inf_f \|f\|.\|f^{-1}\|,$$

l'infimum étant pris sur tous les isomorphismes f de E dans F. On pose aussi

$$d(E,F) := \log \rho(E,F).$$

1) Si E, F et G sont trois evn de même dimension, montrer que $d(E,F) = d(F,E)$, et que $d(E,G) \leq d(E,F) + d(F,G)$.

2) Si E et F sont de même dimension, montrer que $d(E^*,F^*) \leq d(E,F)$ lorsque les espaces duaux sont munis de leur norme duale.

3) Si E et F sont de même dimension, montrer qu'il existe un isomorphisme $f_0 : E \to F$, tel que $\rho(E,F) = \|f_0\|.\|f_0^{-1}\|$. [Indication : on cherchera f_0 parmi les isomorphismes de norme 1.]

4) Montrer que $d(E,F) \geq 0$, avec égalité si, et seulement si, E et F sont isométriques.

Troisième partie : calcul de $d(\ell^2_n, \ell^\infty_n)$.

1) En considérant l'identité de $\mathbf{R}^n$ dans lui-même, montrer que $d(\ell^2_n, \ell^\infty_n) \leq \frac{\log n}{2}$.

2-a) Si $y_1, \dots, y_k \in \mathbf{R}^n$, montrer que

$$\sum_{\varepsilon_1=\pm1,\dots,\varepsilon_k=\pm1} \|\varepsilon_1 y_1 + \dots + \varepsilon_k y_k\|_2^2 = 2^k(\|y_1\|_2^2 + \dots + \|y_k\|_2^2);$$

[Indication : faire une récurrence pour $k \geq 2$.]

Dans la suite de cette question 2), on suppose qu'il existe n vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ de $\mathbf{R}^n$, et des réels strictement positifs α et β, tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, on ait

$$\alpha \max_{1 \leq i \leq n} | < x_i, x > | \leq \|x\|_2 \leq \beta \max_{1 \leq i \leq n} | < x_i, x > |.$$

b) Montrer que $x_1, \ldots, x_n$ est une base de $\mathbf{R}^n$. En conclure qu'il existe $x_1^*, \ldots, x_n^*$ tels que $< x_i^*, x_j >$ soit égal à 1 si $i = j$, et à 0 sinon.

c) Montrer que pour tout $t_1, \ldots, t_n \in \mathbf{R}$, on a

$$\alpha \max_{1 \leq i \leq n} |t_i| \leq \| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i^* \|_2 \leq \beta \max_{1 \leq i \leq n} |t_i|.$$

d) Montrer que $n\alpha^2 \leq \beta^2$. [Indication : on appliquera 2-a pour un choix approprié des y_i.]

3) Montrer que $d(\ell_n^2, \ell_n^\infty) = \frac{\log n}{2}$.

4) Calculer $d(\ell_n^2, \ell_n^1)$.

Quatrième partie : espaces ℓ_n^p, $p \in [1, +\infty]$.

A) Inégalités de convexité.

1) Soit $\alpha \geq 0$ et $t_1, \ldots, t_k \in \mathbf{R}^+$.

a) Si $\alpha \leq 1$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} t_i^\alpha \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k} \right)^\alpha.$$

b) Si $\alpha \geq 1$, montrer que

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k} t_i^\alpha \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^k t_i}{k} \right)^\alpha.$$

2) On se donne $p \in [1, +\infty]$ et on définit $p^* \in [1, +\infty]$ par la relation $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ (de sorte que $1^* = +\infty$ et $(+\infty)^* = 1$).

a) Soit $p \in]1, +\infty[$. Si $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$, montrer que

$$\exp(\frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^*}) \leq \frac{1}{p} \exp(\alpha) + \frac{1}{p^*} \exp(\beta).$$

b) Soit $p \in]1, +\infty[$ et $x, y \in \mathbf{R}^+$. Montrer que

$$xy \leq \frac{1}{p} x^p + \frac{1}{p^*} y^{p^*}.$$

B) Espaces ℓ_n^p.

Pour $x \in \mathbf{R}^n$ et $p \in [1, +\infty[$, on pose $\|x\|_p := (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$. On retrouve bien ainsi les normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_2$ pour $p = 1$ et 2. On rappelle que $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

1) On veut montrer l'inégalité dite de *Hölder* : pour tout $x, y \in \mathbf{R}^n$,

$$| < x, y > | \leq \|x\|_p \|y\|_{p^*}.$$

a) Traiter directement le cas $\{p, p^*\} = \{1, +\infty\}$.

b) Si $p \in]1, +\infty[$, montrer que l'on peut supposer $\|x\|_p = \|y\|_{p^*} = 1$ et que les x_i et les y_i sont tous positifs ou nuls. Déduire de A-2-b que $\sum_{i=1}^n x_i y_i \leq 1$.

2) On veut montrer *l'inégalité de Minkowski* : $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

a) Montrer que l'on peut se ramener au cas où tous les x_i et les y_i sont positifs.

b) Si $z \in \mathbf{R}^n$ est défini par $z_i = (x_i + y_i)^{p-1}$, que vaut $\|z\|_{p^*}$?

c) Montrer que $\|x + y\|_p^p \leq \|x\|_p \|z\|_{p^*} + \|y\|_p \|z\|_{p^*}$.

d) Montrer l'inégalité de Minkowski.

e) Montrer que $\|.\|_p$ est une norme sur $\mathbf{R}^n$. On note ℓ_n^p l'evn $(\mathbf{R}^n, \|.\|_p)$.

3) On considère à nouveau l'application $\mathbf{R}^n \to (\mathbf{R}^n)^*$ introduite dans l'introduction, qui à x associe la forme linéaire φ_x. Montrer que c'est une isométrie de $\ell_n^{p^*}$ sur le dual de ℓ_n^p (ce dernier étant muni de la norme duale de ℓ_n^p décrite au début du problème).

C) Calcul de $d(\ell_n^p, \ell_n^q)$.

1) Montrer que $d(\ell_n^p, \ell_n^q) = d(\ell_n^{p^*}, \ell_n^{q^*})$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

2) Montrer que $d(\ell_n^p, \ell_n^\infty) \leq \frac{\log n}{p}$ pour tout $p \in [1, \infty]$.

3-a) Montrer que si $1 \leq p < q < \infty$, alors

$$\|x\|_q \leq \|x\|_p \leq \|x\|_q n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$$

pour tout $x \in \mathbf{R}^n$.

b) En déduire que sous l'hypothèse ci-dessus, on a

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) \leq (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \log n.$$

4) Si $2 \leq p \leq q \leq \infty$, montrer que

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q}) \log n.$$

5) En déduire que pour $(p - 2)(q - 2) \geq 0$, on a

$$d(\ell_n^p, \ell_n^q) = |\frac{1}{q} - \frac{1}{p}| \log n.$$

6) Pour quelles valeurs de n et de p l'espace ℓ_n^p est-il euclidien ?

7) Montrer que ℓ_2^1 et ℓ_2^∞ sont isométriques. La formule donnée en C-4 est-elle valable pour tout n et tout $1 \leq p, q \leq \infty$?