SESSION 2003

Filière MP

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

Introduction

Soit n un entier naturel non-nul. On note $\mathcal{M} = M_{n,n}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel de dimension n^2 des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. On note $\mathcal{C} = M_{n,1}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel de dimension n des matrices colonne à coefficients dans $\mathbf{C}$, et $\mathcal{L} = M_{1,n}(\mathbf{C})$ l'espace vectoriel de dimension n des matrices ligne. Enfin, on note $\mathcal{R}_1$ le sous-ensemble de $\mathcal{M}$ constitué des matrices de rang 1.

Si P et Q sont deux éléments du groupe linéaire $GL_n(\mathbf{C})$, on note $\varphi_{P,Q}$ l'endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$ défini, pour $A \in \mathcal{M}$, par

$$\varphi_{P,Q}(A) = PAQ.$$

On note T l'endomorphisme transposition de $\mathcal{M}$, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathcal{M}$ défini par $T(A) = {}^tA$ pour $A \in \mathcal{M}$. On note alors

$$G = \{\varphi_{P,Q}; P, Q \in GL_n(\mathbf{C})\},$$
$$G' = \{T \circ \varphi_{P,Q}; P, Q \in GL_n(\mathbf{C})\},$$

et

$$\mathcal{G} = G \cup G'.$$

Première partie

On va montrer dans cette partie que les endomorphismes f de l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, tels que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$, sont précisément les éléments de $\mathcal{G}$.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{G}$, et si $A \in \mathcal{R}_1$, alors $f(A) \in \mathcal{R}_1$.

2) Montrer que toute matrice de rang 1 est produit d'un élément de $\mathcal{C}$ par un élément de $\mathcal{L}$.

3) Soient $X, X' \in \mathcal{C}$ et $V, V' \in \mathcal{L}$. On suppose que $XV + X'V'$ est de rang ≤ 1, et que V et V' sont linéairement indépendants dans $\mathcal{L}$.

3-a) Montrer qu'il existe $Y, Y' \in \mathcal{C}$, tels que $VY = 1$, $V'Y = 0$, $VY' = 0$ et $V'Y' = 1$.

3-b) En déduire que X et X' sont liés dans $\mathcal{C}$.

4) Soient F, F_1, F_2 trois sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On suppose que $F \subset F_1 \cup F_2$. Montrer que $F \subset F_1$ ou $F \subset F_2$.

5) Soit $X \in \mathcal{C} - \{0\}$, on note $X\mathcal{L} = \{XV; V \in \mathcal{L}\}$. De même, on note $\mathcal{C}V = \{XV; X \in \mathcal{C}\}$ pour $V \in \mathcal{L} - \{0\}$.

5-a) Montrer qu'il s'agit là de sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}$, de dimension n et constitués de matrices de rang inférieur ou égal à 1.

5-b) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, de dimension n, et constitué de matrices de rang inférieur ou égal à 1. Montrer que F est soit de la forme $X\mathcal{L}$ pour $X \neq 0$, soit de la forme $\mathcal{C}V$ pour $V \neq 0$.

5-c) Calculer, pour $X, X' \in \mathcal{C} - \{0\}$ et $V, V' \in \mathcal{L} - \{0\}$, les intersections $X\mathcal{L} \cap X'\mathcal{L}$, $\mathcal{C}V \cap \mathcal{C}V'$ et $X\mathcal{L} \cap \mathcal{C}V$.

On se donne, jusqu'à la fin de cette partie, un endomorphisme f sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}$, tel que $f(\mathcal{R}_1) \subset \mathcal{R}_1$.

6) Montrer que l'image par f d'un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}$, de dimension n, et constitué de matrices de rang inférieur ou égal à 1, est du même type.

7) On suppose qu'il existe $X_1, X_2 \in \mathcal{C} - \{0\}$, non colinéaires, tels que $f(X_1\mathcal{L}) = Y_1\mathcal{L}$ et $f(X_2\mathcal{L}) = Y_2\mathcal{L}$ avec $Y_1, Y_2 \in \mathcal{C} - \{0\}$.

7-a) Montrer qu'il existe $Q \in GL_n(\mathbf{C})$, telle que $f(X_1V) = Y_1VQ$ pour tout $V \in \mathcal{L}$. [Indication : définir Q sur une base de $\mathcal{L}$.]

7-b) Montrer que $f(X_1\mathcal{L}) \neq f(X_2\mathcal{L})$. [Indication : raisonner par l'absurde.]

7-c) Montrer que pour tout $V \in \mathcal{L} - \{0\}$, $f(\mathcal{C}V)$ est de la forme $\mathcal{C}U$ avec $U \in \mathcal{L} - \{0\}$.

7-d) Que dire de $f(X\mathcal{L})$ pour $X \in \mathcal{C} - \{0\}$?

7-e) Montrer que pour tout $X \in \mathcal{C} - \{0\}$, il existe $Y \in \mathcal{C} - \{0\}$, telle que pour tout $V \in \mathcal{L}$, on ait

$$f(XV) = YVQ$$

pour la matrice Q obtenue en 7-a).

7-f) Montrer que $f \in G$.

8) Conclure.

Deuxième partie

On va montrer qu'un endomorphisme d'espace vectoriel f de $\mathcal{M}$ vérifie $f(GL_n(\mathbf{C})) \subset GL_n(\mathbf{C})$ si, et seulement si, il est dans $\mathcal{G}$.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{G}$, et si $A \in GL_n(\mathbf{C})$, alors $f(A) \in GL_n(\mathbf{C})$.

2) Soit $A \in \mathcal{M}$, de rang $r \leq n-1$.

2-a) Montrer qu'il existe $M \in GL_n(\mathbf{C})$, telle que $M - \lambda A \in GL_n(\mathbf{C})$ pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$. [Indication : on commencera par traiter le cas où A est la matrice par blocs $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.]

2-b) Montrer qu'il existe $N \in GL_n(\mathbf{C})$, telle que $N - \lambda A$ soit non inversible pour exactement r valeurs distinctes de λ.

3) Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}$, tel que $f(GL_n(\mathbf{C})) \subset GL_n(\mathbf{C})$.

3-a) Montrer que si A n'est pas inversible, alors $f(A)$ non plus.

3-b) Montrer que pour $A \in \mathcal{M}$, on a

$$\operatorname{rang} f(A) \geq \operatorname{rang} A.$$

3-c) En déduire que f préserve le rang.

3-d) Conclure.

Troisième partie

On note $\mathcal{U}_n(\mathbf{C})$ le groupe unitaire, c'est-à-dire le groupe des éléments de $\mathcal{M}$ préservant le produit scalaire hermitien standard $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$ de $E = \mathbf{C}^n$. Si u est un endomorphisme de E, on note u^* l'adjoint de u, c'est-à-dire l'unique endomorphisme de E vérifiant $(x, u(y)) = (u^*(x), y)$ pour tout $x, y \in E$.

Soit f un endomorphisme de $\mathcal{M}$, tel que $f(\mathcal{U}_n(\mathbf{C}) \subset \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$. On va montrer qu'alors $f \in \mathcal{G}$.

1) Montrer que pour tout endomorphisme u sur E, $u^* \circ u$ est un endomorphisme hermitien positif de même rang que u.

Soient u et v deux endomorphismes de E, tels que $u+\lambda v$ soit unitaire pour tout nombre complexe λ de module 1. Montrer que $u^* \circ v = 0$ et que $u^* \circ u + v^* \circ v = Id_E$.

2) Soient $u_1, \ldots, u_p$ des endomorphismes de E tels que $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i u_i$ soit unitaire pour tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ complexes de module 1.

2-a) Montrer que $u_i^* \circ u_j = 0$ pour $i \neq j$, et que $\sum_{i=1}^{p} u_i^* \circ u_i = Id_E$.

2-b) Montrer que les espaces vectoriels $\operatorname{Im} u_i$ sont deux à deux orthogonaux.

2-c) Montrer que $\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rang} u_i = n$.

2-d) Montrer que pour tout endomorphisme unitaire $w \in \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$, on a

$$\sum_{i=1}^{p} \operatorname{rang} f(u_i \circ w) = n.$$

2-e) En déduire que pour tout $1 \leq i \leq p$, le rang de $f(u_i \circ w)$ reste constant lorsque w décrit $\mathcal{U}_n(\mathbf{C})$. On admettra que pour tout $w \in \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$, il existe une application continue $\varphi : [0, 1] \to \mathcal{M}$, telle que $\varphi(0) = Id_E$, $\varphi(1) = w$, et $\varphi(t) \in \mathcal{U}_n(\mathbf{C})$ pour tout $t \in [0, 1]$.

2-f) Montrer que pour tous endomorphismes unitaires w_1 et w_2, on a $\operatorname{rang} f(w_1 \circ u_i \circ w_2) = \operatorname{rang} f(u_i)$.

3) Montrer qu'il existe un entier p, et des endomorphismes $u_1, \ldots, u_p$ de rang 1, tels que l'hypothèse de la question 2) ci-dessus soit satisfaite.

4) Montrer que $f \in \mathcal{G}$.