

SESSION 2004
Filière MP
MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Lyon et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Soit d un entier ≥ 1 . On note $M_d(\mathbf{C})$ l'espace des matrices $d \times d$ à coefficients dans \mathbf{C} . Le produit scalaire hermitien dans \mathbf{C}^d est donné par $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d \bar{x}_i y_i$. On munit \mathbf{C}^d de la norme $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ et $M_d(\mathbf{C})$ de la norme $\|A\| = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

L'adjointe d'une matrice A est la matrice A^* dont les coefficients sont $(A^*)_{i,j} = \overline{A_{j,i}}$. Une matrice U est unitaire si $U^*U = UU^* = I$, où I est la matrice identité.

Une conjugaison unitaire est une application φ de $M_d(\mathbf{C})$ dans lui-même de la forme $\varphi(A) = U^*AU$ où U est une matrice unitaire. Une telle matrice U est dite associée à φ .

On appelle groupe d'Arveson une famille $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ de telles conjugaisons unitaires qui est un groupe continu à un paramètre ; c'est-à-dire

- 1) $\varphi_0(A) = A$, pour tout $A \in M_d(\mathbf{C})$,
- 2) $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$, pour tous $s, t \in \mathbf{R}$,
- 3) $(t \mapsto \varphi_t(A))$ est une application continue de \mathbf{R} dans $M_d(\mathbf{C})$, pour tout $A \in M_d(\mathbf{C})$.

Si T est un sous-groupe de \mathbf{R} , on appelle groupe unitaire (indexé par T), toute famille $(V_t)_{t \in T}$ de matrices unitaires telle que

- i) $V_0 = I$,
- ii) $V_{s+t} = V_s V_t$, pour tous $s, t \in T$.

On dit que $(V_t)_{t \in T}$ est continu si de plus l'application $(t \in T \mapsto V_t)$ est continue, c'est-à-dire : pour tous $t \in T$, $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $s \in T$, $|s - t| < \delta$ impliquent $\|V_s - V_t\| < \epsilon$.

Le but de ce problème est de démontrer le théorème suivant.

Théorème [Théorème d'Arveson en dimension finie] *Pour tout groupe d'Arveson $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$, il existe un groupe unitaire continu $(V_t)_{t \in \mathbf{R}}$ tel que*

$$\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$$

pour tout $t \in \mathbf{R}$ et tout $A \in M_d(\mathbf{C})$.

On pose $S^1 = \{z \in \mathbf{C}; |z| = 1\}$, le cercle unité de \mathbf{C} .

I. Cocycles

1) a) Montrer que deux matrices unitaires U et V sont associées à une même conjugaison φ si et seulement si $U = \lambda V$ pour un $\lambda \in S^1$.

b) Soit $(\varphi_t)_{t \in \mathbf{R}}$ un groupe d'Arveson. Montrer que φ_t est de la forme $\varphi_t(A) = U_t^* A U_t$ où les matrices unitaires U_t vérifient $U_{t+s} = \alpha(t, s) U_t U_s$ pour une famille $\{\alpha(t, s); s, t \in \mathbf{R}\}$ de points de S^1 telle que

$$\begin{aligned}\alpha(0, t) &= \alpha(t, 0) = 1 \\ \alpha(t, s)\alpha(t+s, u) &= \alpha(t, s+u)\alpha(s, u)\end{aligned}$$

pour tous $s, t, u \in \mathbf{R}$.

Une famille $\{\alpha(s, t); s, t \in \mathbf{R}\}$ de points de S^1 vérifiant les propriétés ci-dessus sera appelée *cocycle*.

2) On considère un cocycle quelconque α et on note $\tilde{\alpha}$ la restriction de α aux indices s, t qui sont dans \mathbf{N} . On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dans S^1 *détermine* $\tilde{\alpha}$ si

$$\tilde{\alpha}(m, n) = \frac{u_m u_n}{u_{m+n}}$$

pour tous $n, m \in \mathbf{N}$.

a) Montrer que si $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbf{N}}$ sont deux suites qui déterminent $\tilde{\alpha}$ alors il existe $a \in S^1$ tel que $u_n = a^n v_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b) Montrer que $\tilde{\alpha}$ est entièrement fixé lorsque l'on connaît les valeurs $\tilde{\alpha}(1, n)$, $n \in \mathbf{N}$.

c) En déduire qu'il existe toujours une suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui détermine $\tilde{\alpha}$.

3) a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbf{N}$, on peut construire une suite $(u_k^{(n)})_{k \in \mathbf{N}}$ qui détermine la famille $\{\tilde{\alpha}_n(\ell, k) = \alpha(\ell/2^n; k/2^n); \ell, k \in \mathbf{N}\}$ et telle que

$$u_2^{(n+1)} = u_1^{(n)}$$

pour tout $n \in \mathbf{N}$.

b) En déduire qu'alors $u_{2^k}^{(n+1)} = u_k^{(n)}$ pour tous $k, n \in \mathbf{N}$.

c) Soit D_+ l'ensemble des nombres dyadiques positifs : $D_+ = \{k/2^n; k, n \in \mathbf{N}\}$ (noter que D_+ est stable par l'addition). Soit α un cocycle, montrer qu'il existe une application $t \mapsto u_t$ de D_+ dans S^1 telle que

$$\alpha(t, s) = \frac{u_t u_s}{u_{t+s}}$$

pour tous $s, t \in D_+$.

4) Montrer que la famille $(V_t = u_t U_t)_{t \in D_+}$ est un *semigroupe*, c'est-à-dire $V_s V_t = V_{s+t}$ pour tous $s, t \in D_+$.

On a ainsi construit un semigroupe de matrices unitaires $(V_t)_{t \in D_+}$, telles que $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$ pour tout $t \in D_+$ et tout $A \in M_d(\mathbf{C})$.

5) Soit $D \subset \mathbf{R}$ le sous-groupe des nombres dyadiques (positifs ou négatifs) : $D = \{k/2^n; k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{N}\}$. Montrer qu'il existe un groupe unitaire $(V_t)_{t \in D}$ tel que $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$ pour tout $t \in D$ et tout $A \in M_d(\mathbf{C})$.

6) Montrer que si le groupe $(V_t)_{t \in D}$, ci-dessus est continu alors le théorème d'Arveson est démontré.

On va s'attacher dans la suite à obtenir cette continuité.

II. Continuité

On se donne maintenant un semigroupe quelconque de matrices unitaires $(V_t)_{t \in D_+}$ telles que $\varphi_t(A) = V_t^* A V_t$ pour tout $t \in D_+$, tout $A \in M_d(\mathbf{C})$.

Dans ce qui suit, les limites portant sur t s'entendent pour $t \in D_+$.

1) a) Déduire de la propriété de continuité de φ que tout $\Psi \in \mathbf{C}^d$ de norme 1 on a $\lim_{t \rightarrow 0} |\langle \Psi, V_t \Psi \rangle|^2 = 1$.

b) En déduire que $V_t \Psi$ est de la forme $e^{i\theta_t} \Psi + \varepsilon(t)$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} \varepsilon(t) = 0$.

2) Soit Ψ et Ψ' deux vecteurs de \mathbf{C}^d , de norme 1. On pose, pour tout $t \in D_+$, $a_t = \langle \Psi, V_t \Psi \rangle$ et $b_t = \langle \Psi', V_t \Psi' \rangle$. Montrer que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_t}{b_t} = 1$.

3) En déduire que s'il existe un $\Psi \in \mathbf{C}^d$ non nul tel que $\lim_{t \rightarrow 0} V_t \Psi = \Psi$ alors cette propriété sera vraie pour *tout* $\Psi \in \mathbf{C}^n$.

Notre but est maintenant de démontrer qu'on peut changer $(V_t)_{t \in D_+}$, pour qu'il existe un tel Ψ .

III. Familles presque multiplicatives

Une famille $(a_t)_{t \in D_+}$, de nombres complexes est dite

multiplicative si $|a_t| = 1$ pour tout $t \in D_+$ et $a_t a_s = a_{s+t}$ pour tous $s, t \in D_+$;

presque multiplicative si $a_0 = 1$, $\lim_{t \rightarrow 0} |a_t| = 1$ et

$$\lim_{s, t \rightarrow 0} \frac{a_{s+t}}{a_t a_s} = 1.$$

1) Montrer que, pour tout $\Psi \in \mathbf{C}^d$, la famille $(a_t = \langle \Psi, V_t \Psi \rangle)_{t \in D_+}$, est presque multiplicative.

2) a) Soit $(a_t)_{t \in D_+}$, une famille presque multiplicative. Montrer que la famille $(\frac{a_t}{|a_t|})$ est encore presque multiplicative.

On suppose donc dans la suite que $|a_t| = 1$ pour tout $t \in D_+$.

b) On pose $b_1 = a_1$ et on construit $b_{\frac{1}{2^{n+1}}}$, par récurrence sur n , comme étant la racine carrée de $b_{\frac{1}{2^n}}$ la plus proche (pour la topologie usuelle de \mathbf{C}) de $a_{\frac{1}{2^{n+1}}}$ (dans le cas où les deux racines sont à la même distance, on choisit n'importe laquelle des deux). Enfin, pour tout $t = k/2^n$, on pose $b_t = (b_{\frac{1}{2^n}})^k$.

Montrer que cette définition ne dépend pas de la façon d'écrire t sous la forme $k/2^n$ et qu'elle définit une famille multiplicative b_t , $t \in D_+$.

c) Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_{\frac{1}{2^n}}}{b_{\frac{1}{2^n}}} = 1.$$

Indication : soit $c_n = \frac{a_{\frac{1}{2^n}}}{b_{\frac{1}{2^n}}}$, montrer que $\operatorname{Re} c_n \geq 0$ et que $\frac{c_n}{c_{n+1}} \rightarrow 1$.

3) Soit $(a_t)_{t \in D_+}$, une famille presque multiplicative telle que $a_{\frac{1}{2^n}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. On veut démontrer l'inégalité suivante pour n assez grand :

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{2^n}] \cap D_+} d(a_t, 1) \leq \frac{1}{2} d(a_{\frac{1}{2^{n-1}}}, 1) + 2 \sup_{s, t \in [0, \frac{1}{2^{n-1}}] \cap D_+} d(a_{s+t}, a_s a_t) \quad (1)$$

où d est la distance usuelle sur S^1 : $d(z_1, z_2) = |\arg(z_1/z_2)|$, tous les arguments étant pris dans $]-\pi, \pi]$. Dans la suite, on a choisi un $N \in \mathbf{N}$ tel que le membre de droite de (1) soit majoré par $\pi/10$ pour tout $n \geq N$. On suppose, pour simplifier, que $N = 1$.

a) Montrer qu'on peut se ramener au cas $a_1 = 1$ et à montrer seulement :

$$\sup_{t \in [0, \frac{1}{2}] \cap D_+} d(a_t, 1) \leq 2 \sup_{s, t \in [0, 1] \cap D_+} d(a_{s+t}, a_s a_t).$$

b) Soit $\varepsilon = \sup_{s, t \in [0, 1] \cap D_+} d(a_{s+t}, a_s a_t)$. Supposons que $\sup_{t \in [0, \frac{1}{2}] \cap D_+} d(a_t, 1) > 2\varepsilon$. Montrer qu'il existe un *plus petit* $n_0 \in \mathbf{N}$ tel qu'il existe un $k \in \{0, \dots, 2^{n_0-1}\}$ avec $d(a_{\frac{k}{2^{n_0}}}, 1) > 2\varepsilon$.

Soit k_0 le plus petit tel k . Soit $\theta_t \in]-\pi, \pi]$ l'argument de a_t , $t \in D_+$. Supposons que $\theta_{\frac{k_0}{2^{n_0}}} > 0$ pour fixer les idées.

c) Montrer que $\theta_{\frac{k_0}{2^{n_0}}} > 2\varepsilon$ et $|\theta_{\frac{j}{2^{n_0}}}| \leq 2\varepsilon$ si $j \in \{0, \dots, k_0 - 1\}$.

d) Montrer que $\theta_{\frac{2k_0}{2^{n_0}}} > 3\varepsilon$.

e) Montrer que $k_0/2^{n_0} \in]1/4, 1/2]$.

f) En distinguant les deux cas suivants : $\frac{2k_0}{2^{n_0}} \leq 1 < \frac{3k_0}{2^{n_0}}$ et $\frac{3k_0}{2^{n_0}} \leq 1 < \frac{4k_0}{2^{n_0}}$, montrer que $\theta_1 > 0$ ou que $\theta_{\frac{3k_0}{2^{n_0}}} > 4\varepsilon$ (respectivement). En déduire une contradiction et que (1) est démontré.

g) En déduire que pour toute famille presque multiplicative $(a_t)_{t \in D_+}$, il existe une famille multiplicative $(b_t)_{t \in D_+}$, telle que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a_t}{b_t} = 1$.

4) Terminer la démonstration du théorème d'Arveson.