SESSION DE 1999

Filière MP
COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Lyon et Cachan)

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices est interdit

Notations : Dans tout le problème, on appelle polynôme homogène en les variables $x_1, \ldots, x_n$ de degré d à coefficients entiers une expression Q de la forme

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\alpha \in \Lambda_{n,d}} a_\alpha \, x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

où

$$\Lambda_{n,d} = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n \mid \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = d\}$$

et pour tout $\alpha \in \Lambda_{n,d}$, le coefficient a_α appartient à $\mathbb{Z}$.

On notera $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des polynômes homogènes en les variables $x_1 \ldots, x_n$ de degré d à coefficients entiers.

I. Préliminaires, premiers exemples

Soient Q et R dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$. **Dans tout le problème**, on dira que Q est équivalent à R s'il existe une matrice $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ (groupe des matrices carrées $n \times n$ inversibles et à coefficients rationnels) et un rationnel non nul c tels que

$$Q\left(\bar{x}\right) = c\, R\left(\bar{x} \cdot {}^t M\right)$$

où $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, ${}^tM$ est la transposée de la matrice $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ et

$$\bar{x} \cdot {}^tM = \left(\sum_{i=1}^{n} m_{1i}\, x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} m_{ni}\, x_i\right).$$

I.1 a) Montrer que "être équivalent à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$.

b) Soit μ un entier non nul. Montrer que $\mu^{10}\, x_1^2 + \mu^4\, x_1\, x_2 + x_2^2$ est équivalent à $x_1^2 + x_1\, x_2 + \mu^2\, x_2^2$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$. (Indication : on prendra M diagonale).

I.2 a) Soit $Q\left(x_1, \ldots, x_n\right) = a\, x_i^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ où i est fixé entre 1 et n et a dans $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer que Q est équivalent à x_1^2.

b) Soit $Q\left(x_1, x_2\right) = a\, x_1^2 + b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer que si $b^2 - 4\, a\, c = 0$, alors Q est équivalent à x_1^2.

c) Soit $Q\left(x_1, x_2\right) = a\, x_1^2 + b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Montrer plus généralement qu'il existe un entier α tel que Q est équivalent à $x_1^2 + \alpha\, x_2^2$.

d) Soit $Q\left(x_1, x_2\right) = x_1^2 + \alpha\, x_2^2 \in \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que Q soit équivalent à x_1^2.

e) Déterminer l'ensemble des classes d'équivalence de la relation "être équivalent à" sur $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$.

Soient Q dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et p un nombre premier. **Dans tout le problème**, on dira que Q est simplifiable en p s'il existe $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $s \in \mathbb{Z}$ tels que

(i) $s > \dfrac{d}{n} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i$,

(ii) le polynôme $p^{-s} Q\,(p^{\omega_1}\, x_1, \ldots, p^{\omega_n}\, x_n)$ est encore à coefficients entiers (i.e. appartient à $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$).

Le $(n+1)$-uplet $(s, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ sera appelé poids de simplification en p pour le polynôme Q.

I.3 Soit Q dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et p un nombre premier.

a) Montrer que si $(s, \omega_1, \ldots, \omega_n)$ est un poids de simplification en p pour Q, alors pour tout $\omega \in \mathbb{Z}$, $(s + d\,\omega, \omega_1 + \omega, \ldots, \omega_n + \omega)$ est aussi un poids de simplification en p pour Q.

b) Montrer qu'il existe un poids de simplification en p pour Q de la forme $(s, \omega, \ldots, \omega)$ avec s et ω dans $\mathbb{Z}$ si et seulement si tous les coefficients de Q sont divisibles par p.

I.4 a) Soient k un entier entre 1 et n, et $l_1, \ldots, l_k$ des formes linéaires sur $\mathbb{R}^n$ que l'on suppose indépendantes. Montrer qu'il existe x dans $\mathbb{R}^n$ tel que pour tout j entre 1 et k, on a $l_j(x) > 0$.
En déduire qu'il existe $\bar{x}$ dans $\mathbb{Z}^n$ tel que pour tout j entre 1 et k, on a $l_j(\bar{x}) > 0$.

b) Pour a réel, on note M_a la matrice carrée de taille $n-1$ dont le terme général $m_{i,j}$ vaut a si $i = j = 1$ et -1 sinon. Montrer que $-n$ est valeur propre de M_a si et seulement si $a = -\dfrac{n}{2} - 1$.

c) En déduire que pour tout nombre premier p et pour tout couple (d_1, d_n) d'entiers positifs vérifiant $(d_1, d_n) \neq (\dfrac{d}{2}, \dfrac{d}{2})$ et $d_1 + d_n = d$, le polynôme $x_1^{d_1}\, x_n^{d_n} + x_2^d + \cdots + x_{n-1}^d$ est simplifiable en p dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$.

d) Montrer que pour tout nombre premier p, le polynôme $x_1^d + \cdots + x_n^d$ n'est pas simplifiable en p dans $\mathbb{Z}_{(d)}[x_1, \ldots, x_n]$ et le polynôme $x_1\, x_3 + x_2^2$ n'est pas simplifiable en p dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2, x_3]$.

II. Simplification de formes quadratiques

Dans toute cette partie, on ne s'intéresse qu'à des polynômes de degré $d = 2$.

Pour un élément Q de $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ écrit sous la forme

$$Q\,(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij}\, x_i\, x_j \ ,$$

on note $S(Q)$ la matrice symétrique réelle de taille n dont le terme général s_{ij} est défini par $s_{ij} = a_{ij}$ si $i < j$ et $s_{ii} = 2\,a_{ii}$. On note enfin $D(Q)$ le déterminant de la matrice $S(Q)$.

II.1 Exprimer $Q(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de $\bar{x}$, ${}^t\bar{x}$ et $S(Q)$.

II.2 a) Soit $R\,(\bar{x}) = c\,Q\left(\bar{x} \cdot {}^tM\right)$ un polynôme de $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ équivalent à Q, où $M \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ et $c \in \mathbb{Q}^*$. Exprimer $S(R)$ en fonction de c, M et $S(Q)$. En déduire $D(R)$ en fonction de c, n, $\det M$ et $D(Q)$.

b) Soit Q dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que $D(Q) \neq 0$. Montrer qu'il existe $\tilde{Q}$ équivalent à Q dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$ tel que pour toute matrice $M \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$

(groupe des matrices $n \times n$ à coefficients entiers dont le déterminant vaut 1) et pour tout p premier, le polynôme $\tilde{Q}\left(\bar{x} \cdot {}^tM\right)$ n'est pas simplifiable en p. (Indication : si Q est dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, \ldots, x_n]$, alors $D(Q) \in \mathbb{Z}$).

II.3 Soit M une matrice à coefficients entiers de taille $n \times n$. On note $d(M)$ le pgcd des coefficients de M.

a) Par des combinaisons élémentaires sur les lignes et les colonnes de M, montrer qu'il existe A et B dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$, et une matrice M' à coefficients entiers telles que $M = AM'B$ et vérifiant la propriété suivante : l'un des coefficients de M' est égal en valeur absolue à $d(M')$. (Indication : on pourra faire décroitre le minimum des valeurs absolues des coefficients non nuls de M.)

b) Par des combinaisons élémentaires sur les lignes et les colonnes de M', en déduire qu'il existe $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ et D une matrice diagonale à coefficients entiers telles que $M = \tilde{A}D\tilde{B}$. (Indication : on pourra raisonner par récurrence sur n.)

c) En déduire que toute matrice M dans $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Q})$ s'écrit $M = M'DM''$ avec M' et M'' dans $\mathrm{SL}(n, \mathbb{Z})$ et D diagonale à coefficients rationnels.

II.4 Soit $Q(x_1, x_2) = a\, x_1^2 + b\, x_1\, x_2 + c\, x_2^2$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$ fixé. On suppose dans toute la question II.4 qu'il existe $\tilde{Q}$ dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$ équivalent à Q tel que $|D(\tilde{Q})| < |D(Q)|$.

a) Montrer qu'il existe M_1 et M_2 dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et $D = \mathrm{diag}(r_1, r_2)$ une matrice diagonale à coefficients rationnels telles que les polynômes Q_1 et Q_2 définis par $Q_1\left(\bar{x}\right) = \tilde{Q}\left(\bar{x} \cdot {}^tM_1\right)$ et $Q_2\left(\bar{x}\right) = Q\left(\bar{x} \cdot {}^tM_2\right)$ vérifient :

(i) $|D(Q_1)| < |D(Q_2)|$,

(ii) $Q_1(\bar{x}) = c\, Q_2(\bar{x} \cdot {}^tD)$ pour un rationnel non nul c.

b) Avec les notations précédentes, on pose $Q_1(x_1, x_2) = a_1\, x_1^2 + b_1\, x_1\, x_2 + c_1\, x_2^2$ et $Q_2(x_1, x_2) = a_2\, x_1^2 + b_2\, x_1\, x_2 + c_2\, x_2^2$. Exprimer a_1, b_1 et c_1 en fonction de a_2, b_2, c_2, c, r_1 et r_2.

c) Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise $D(Q) = D(Q_2)$, p divise b_2 et p^2 divise $a_2\, c_2$.

d) En déduire que Q_2 est simplifiable en p.

II.5 a) Soit Q dans $\mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]$ fixé tel que $D(Q) \neq 0$. Déduire des questions précédentes l'équivalence des assertions suivantes :

(i) pour toute matrice M dans $\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$ et tout nombre premier p, le polynôme $Q\left(\bar{x} \cdot {}^tM\right)$ n'est pas simplifiable en p,

(ii) $|D(Q)| = \min\left\{|D(\tilde{Q})|,\ \tilde{Q} \text{ équivalent à } Q \text{ dans } \mathbb{Z}_{(2)}[x_1, x_2]\right\}$.

b) Etudier l'équivalence précédente dans le cas où $D(Q) = 0$.