SESSION 2000

Filière MP

MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Ulm et Cachan)

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Préambule

Dans tout le problème, D désigne le disque fermé de centre 0 et de rayon 1 de $\mathbb{R}^2$, et $\overset{\circ}{D}$ son intérieur. On notera $\mathcal{B}$ l'espace vectoriel normé des fonctions continues de D dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{z\in D} |u(z)|\,.$$

On conviendra de noter indifféremment $u(z)$ ou $u(x,y)$ l'image par un élément $u \in \mathcal{B}$ du vecteur $z = (x,y)$. Sur l'espace vectoriel orienté $\mathbb{R}^2$ muni de sa structure euclidienne canonique, on note $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de déterminant 1 et $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ celui des endomorphismes symétriques (c'est-à-dire autoadjoints). On notera $< z_1, z_2 >$ le produit scalaire de deux vecteurs z_1 et z_2 de $\mathbb{R}^2$, et $\det(z_1,z_2)$ leur déterminant dans une base orthonormée directe.

On s'intéresse, pour des applications $T : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$, aux propriétés suivantes :

(P1) $\quad \forall u \in \mathcal{B},\ \forall R \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2), \qquad T\Big(x \mapsto u(x)\Big) = T\Big(x \mapsto u(Rx)\Big).$

(P2) $\quad \forall (u,v) \in \mathcal{B}^2, \qquad \Big(\forall x \in D,\ u(x) \leqslant v(x)\Big) \quad \Longrightarrow \quad T(u) \leqslant T(v).$

(P3) $\quad \forall u \in \mathcal{B},\ \forall g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante continue, $\qquad T(g\circ u) = g(T(u)).$

Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.
Seule la question III.8. utilise des résultats de la partie II.

Première partie

Dans cette partie, pour toute fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on notera $m(f)$ l'ensemble (éventuellement vide) des points de $\mathbb{R}$ où f atteint un minimum absolu.

— A —

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, c'est-à-dire telle que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in]0,1[, \qquad f\Big(\lambda x + (1-\lambda) y\Big) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

I.1.a. Montrer que si t et t' sont deux éléments de $m(f)$ tels que $t < t'$, alors $[t,t'] \subset m(f)$.

I.1.b. En déduire que $m(f)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, et montrer qu'il peut être vide.

I.2. Montrer que pour tous réels a, b, c tels que $a < b < c$, on a

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \frac{f(c)-f(a)}{c-a} \leqslant \frac{f(c)-f(b)}{c-b}.$$

I.3. En déduire que f est continue sur $\mathbb{R}$.

I.4. On suppose de plus que $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{-\infty} f = +\infty$. Montrer que $m(f)$ n'est pas vide.

I.5. Soient n un entier naturel non nul et $y_1, y_2, \ldots, y_n$ des nombres réels. On pose, pour $p \in [1, +\infty[$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$f_p(x) = \sum_{i=1}^{n} |x - y_i|^p.$$

I.5.a. Montrer que pour tout $p > 1$, $m_p(f)$ est un singleton.

I.5.b. Calculer $m(f_2)$.

I.5.c. Soit σ une permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$ telle que

$$y_{\sigma(1)} \leqslant y_{\sigma(2)} \leqslant \ldots \leqslant y_{\sigma(n)}.$$

Montrer que si n est impair, alors

$$m(f_1) = \left\{ y_{\sigma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \right\}.$$

Calculer $m(f_1)$ lorsque n est pair.

— B —

Soit u un élément de $\mathcal{B}$. On désigne par $\iint_D u(x,y)\,dxdy$ l'intégrale double de u sur D, soit

$$\iint_D u(x,y)\,dxdy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 u(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, dr \right) d\theta.$$

On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(t) = \iint_D |t - u(x,y)|\, dxdy.$$

I.6. Montrer que $m(h) \subset \left[\min\limits_D u, \max\limits_D u \right]$.

I.7.a. Montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \lambda \in]0,1[, \qquad \Big| \lambda a + (1-\lambda) b \Big| \leqslant \lambda |a| + (1-\lambda)|b|,$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $ab \geqslant 0$.

I.7.b. En déduire que h est une fonction convexe, puis que $m(h)$ est un singleton. Dans toute la suite, on notera $M(u)$ l'unique élément de $m(h)$ (M est donc une application de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$).

I.8. Montrer que M vérifie la propriété (P1), et que $M(-u) = -M(u)$.

I.9. On définit, pour δ réel non nul,

$$\chi_\delta(t) = \frac{|t+\delta| - |t|}{\delta}.$$

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & t \geqslant M(u) \\ \text{(ii)} & \forall \delta > 0, \displaystyle\iint_D \chi_\delta\Big(t - u(x,y)\Big)\, dxdy \geqslant 0 \\ \text{(iii)} & \exists \alpha > 0,\ \forall \delta \in]0, \alpha[,\ \displaystyle\iint_D \chi_\delta\Big(t - u(x,y)\Big)\, dxdy \geqslant 0 \end{array}$$

I.10. Montrer que M vérifie la propriété (P2).

I.11.a. On considère une fonction g continue croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall K > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall (s,t,\delta) \in \mathbb{R} \times [-K, K] \times]0, \alpha[,\ \ \chi_\delta\Big(g(s) + \varepsilon - g(t)\Big) \geqslant \chi_\delta(s - t).$$

I.11.b. En déduire que $g(M(u)) + \varepsilon \geqslant M(g \circ u)$, puis que M vérifie la propriété (P3).

I.12. Dans cette question, on considère, pour α réel, la fonction

$$F(\alpha) = M\Big((x,y) \mapsto x + \frac{\alpha}{2} y^2\Big).$$

I.12.a. Montrer que F est impaire. En déduire $F(0)$.

I.12.b. Montrer que

$$\forall r \in \mathbb{R},\ \forall s > 0, \qquad \lim_{\delta \to 0} \int_{-s}^{s} \chi_\delta(r - s)\, dx = 2A(r,s)\,,$$

où $A(r,s) = \begin{cases} s & \text{si } \ r \geqslant s, \\ r & \text{si } \ -s \leqslant r \leqslant s, \\ -s & \text{si } \ r \leqslant -s. \end{cases}$

I.12.c. En déduire que

$$\int_{-1}^{1} A\Big(F(\alpha) - \frac{\alpha}{2} y^2, \sqrt{1 - y^2}\Big)\ dy = 0.$$

I.12.d. Montrer que $F(\alpha) \underset{\alpha \to 0}{\sim} \dfrac{\alpha}{6}$.

Deuxième partie

Dans cette partie, on considère une application T de $\mathcal{B}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés (P1), (P2) et (P3). On définit la fonction

$$F\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & T\left((x,y) \mapsto x + \dfrac{t}{2} y^2\right), \end{array}$$

et pour $h \in]0,1]$, on pose

$$T_h(u) = T\big(z \mapsto u(hz)\big).$$

Le but de cette partie est d'étudier le comportement de $T_h(u)$ quand h tend vers 0.

II.1.a. Montrer que

$$\forall v \in \mathcal{B},\ \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad T(\lambda v + \mu) = \lambda T(v) + \mu.$$

II.1.b. Montrer que T est 1-lipschitzienne.

II.1.c. En déduire que F est 1/2-lispchitzienne.

II.2. Soit u un élément de $\mathcal{B}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D}$. Pour tout z dans $\overset{\circ}{D}$, on note $\nabla u(z)$ le vecteur gradient de u en z et $D^2u(z)$ sa différentielle seconde, considérée comme un élément de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Montrer que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha \in]0,1],\ \forall (h,z) \in]0,\alpha[\times D,$$
$$\left| u(hz) - u(0) - h < \nabla u(0), z > - \frac{h^2}{2} < D^2u(0)z, z > \right| \leqslant \varepsilon h^2.$$

II.3. Montrer que

$$T_h(u) = u(0) + G\big(h\nabla u(0), h^2 D^2 u(0)\big) + \underset{h\to 0}{o}(h^2),$$

où G est une fonction de $\mathbb{R}^2 \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{R}$.

II.4. Soit u un élément de $\mathcal{B}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D}$ tel que $v(0) = 0$ et $\|\nabla v(0)\| = 1$. Montrer qu'il existe un unique élément R de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$ tel que l'application $v' = v \circ R$ vérifie $\nabla v'(0) = (1,0)$.

II.5.a. Montrer que $\quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in D, \qquad |xy| \leqslant \varepsilon y^2 + \dfrac{x^2}{4\varepsilon}.$

II.5.b. On note $D^2v'(0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ ($\mathbb{R}^2$ étant muni de sa base canonique). Montrer qu'il existe une constante K et un élément v'' de $\mathcal{B}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D}$ tels que

$$v''(0) = 0, \quad \nabla v''(0) = (1,0), \quad D^2v''(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix},$$
$$\text{et} \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall (x,y) \in D, \qquad \left| v''(x,y) - v'(x,y) \right| \leqslant K\left(\varepsilon y^2 + \frac{x^2}{4\varepsilon}\right).$$

II.6.a. Montrer que pour tous réels α et β, il existe une bijection croissante $g_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que la fonction

$$w_{\alpha,\beta} : \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & g_{\alpha,\beta}\Big(v''(x,y) + \alpha y^2 + \beta x^2\Big). \end{array}$$

vérifie $\quad w_{\alpha,\beta} = 0, \quad \nabla w_{\alpha,\beta}(0) = (1,0), \quad$ et $\quad D^2 w_{\alpha,\beta}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c+2\alpha \end{pmatrix}.$

II.6.b. Etablir que $g_{\alpha,\beta}^{-1}(t) = t + \underset{t\to 0}{O}(t^2)$.

II.7.a. Montrer que $T_h(w_{\alpha,\beta}) = hF\Big(h(c+2\alpha)\Big) + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$.

II.7.b. En déduire que

$$\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall h \in [-\delta,\delta], \qquad |T_h(w_{\alpha,\beta}) - hF(hc)| \leqslant (\varepsilon + \alpha)h^2.$$

II.8. Montrer que si $F(0) = 0$, alors $T_h(v) = hF(hc) + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$.

II.9. Soit p et q deux fonctions à valeurs réelles, et $H(x,y) = (p(x,y), q(x,y))$. On appelle divergence de H la fonction

$$\operatorname{div} H = \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}.$$

II.9.a. Calculer $\left(\operatorname{div} \dfrac{\nabla v'}{\|\nabla v'\|}\right)(0)$ en fonction de a, b et c.

II.9.b. On suppose que H est de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de 0. Montrer que pour tout élément R de $\mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\operatorname{div}(R^{-1} \circ H \circ R)(0) = (\operatorname{div} H)(0).$$

II.10. Soit u un élément de $\mathcal{B}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D}$ tel que $\nabla u(0) \neq 0$. Montrer que si $F(0) = 0$, alors

$$T_h(u) = u(0) + h\,\|\nabla u(0)\|\, F\left(h\left(\operatorname{div} \frac{\nabla u}{\|\nabla u\|}\right)(0)\right) + \underset{h\to 0}{o}(h^2).$$

II.11. Soit S l'ensemble des segments fermés du plan, de longueur 2, et dont le milieu est en $(0,0)$. On considère l'application

$$T \;:\; \begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \displaystyle\inf_{s\in S} \sup_{(x,y)\in s} u(x,y). \end{array}$$

Donner, lorsque u est un élément de $\mathcal{B}$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\overset{\circ}{D}$ tel que $\nabla u(0) \neq 0$, un équivalent de $T_h(u) - u(0)$ quand h tend vers 0.

Troisième partie

On considère un réel τ strictement positif et une application

$$C \;:\; \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\times]0,\tau[& \to & \mathbb{R}^2 \\ (r,t) & \mapsto & C(r,t) \end{array}$$

de classe $\mathcal{C}^4$, 1-périodique par rapport à r, et telle que $\frac{\partial C}{\partial r}$ ne s'annule jamais. Ainsi, en tout point $C(r,t)$ on peut définir le vecteur unitaire tangent, noté $T(r,t)$, le vecteur normal $N(r,t)$ (image de $T(r,t)$ par la rotation vectorielle d'angle $+\pi/2$), et la courbure $\kappa(r,t)$ de l'arc paramétré $r \mapsto C(r,t)$. On dira alors que C est solution de (P) si

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}\times]0,\tau[, \qquad \frac{\partial C}{\partial r}(r,t) = \kappa(r,t) N(r,t).$$

III.1. Déterminer toutes les fonctions $\rho(t)$ telles que $C(r,t) = \rho(t)\,(\cos 2\pi r, \sin 2\pi r)$ soit solution de (P).

III.2.a. On pose $v(r,t) = \|\frac{\partial C}{\partial r}(r,t)\|$. Montrer qu'il existe une unique application φ : $\mathbb{R}\times]0,r[\to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}\times]0,\tau[, \qquad \int_0^{\varphi(s,t)} v(r,t)\,dr = s,$$

et que φ est de classe $\mathcal{C}^3$ sur $\mathbb{R}\times]0,\tau[$.

III.2.b. Pour toute fonction $\Gamma : \mathbb{R}\times]0,\tau[\to \mathbb{R}$, on note $\hat{\Gamma}$ la fonction définie sur $\mathbb{R}\times]0,\tau[$ par $\hat{\Gamma}(s,t) = \Gamma(\varphi(s,t),t)$. Montrer que si Γ est $\mathcal{C}^1$, alors

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}\times]0,\tau[, \qquad \frac{\partial \Gamma}{\partial r}(\varphi(s,t),t) = \hat{v}(s,t)\frac{\partial \hat{\Gamma}}{\partial s}(s,t).$$

III.3.a. Dans toute la suite, on suppose que C est solution de (P). Montrer que

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -v\kappa^2.$$

III.3.b. Montrer que si $\Gamma : \mathbb{R}\times]0,\tau[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{v}\frac{\partial \Gamma}{\partial r}\right) = \kappa^2 \frac{1}{v}\frac{\partial \Gamma}{\partial r} + \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}\right).$$

III.3.c. En déduire que

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{v}\frac{\partial \kappa}{\partial r}N \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial N}{\partial t} = -\frac{1}{v}\frac{\partial \kappa}{\partial r}T.$$

III.4. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\forall t \in]0,\tau[, \qquad \int_0^1 \kappa(r,t)v(r,t)\,dr = 2\pi n.$$

III.5. Soit $L(t)$ le périmètre de $r \mapsto C(r,t)$ sur une période. Montrer que L est dérivable et que

$$L'(t) = \int_0^1 -\kappa^2(r,t)v(r,t)\,dr.$$

En déduire que $L(t)L'(t) \leqslant -4\pi^2 n^2$.

III.6. Soit

$$A(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 \det\left(C(r,t), \frac{\partial C}{\partial r}(r,t)\right)\,dr.$$

Montrer que $A'(t) = -2\pi n$.

III.7. On suppose que $n = 1$, que $\lim_{t\to\tau} A(t) = 0$ et que

$$\forall t \in]0,\tau[, \qquad \frac{L^2(t)}{A(t)} \geqslant 4\pi.$$

Montrer que

$$\lim_{t\to\tau} \frac{L^2 - t)}{A(t)} = 4\pi.$$

III.8. Soit $u : \mathbb{R}^2\times]0,\tau[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telle que

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}\times]0,\tau[, \qquad u\Big(C(r,t),t\Big) = 0.$$

Montrer qu'en tout point (r,t) tel que $\nabla u_t(C(r,t)) \neq 0$, on a

$$\frac{\partial u}{\partial t}(C(r,t),t) = \left(\|\nabla u_t\| \operatorname{div} \frac{\nabla u_t}{\|\nabla u_t\|}\right)(C(r,t)),$$

où u_t désigne la restriction de u à t fixé, c'est-à-dire la fonction de deux variables réelles $u_t : (x,y) \mapsto u(x,y,t)$, et div est l'opérateur défini au II.9.