SESSION 2004

Filière MP

MATHÉMATIQUES

Épreuve commune aux ENS de Paris et Cachan

Durée : 4 heures

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

L'objectif de ce problème est d'étudier les propriétés de quelques espaces de fonctions périodiques et de quelques transformations opérant entre ces espaces. Dans tout l'énoncé, C^0_{per} désigne l'ensemble des fonctions continues périodiques sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, de période 2π, et plus généralement pour tout $s \in \mathbb{N}$, C^s_{per} est l'ensemble des fonctions s fois continûment dérivables, périodiques de période 2π. Enfin C^∞_{per} est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables.

Pour tout $n \in \mathbb{Z}$ on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction e_n par $e_n(x) = e^{inx}$. Pour une fonction $\phi \in C^0_{per}$, on définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$, son n-ième coefficient de Fourier par

$$c_n(\phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(x)e_n(-x)dx.$$

On rappelle que pour de telles fonctions,

$$\int_0^{2\pi} |\phi(x)|^2 dx = 2\pi \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(\phi)|^2.$$

On utilisera également les deux résultats suivants:

Résultat 1: Soit $f(n,m)$ une application de $\mathbb{Z}^2$ dans $\mathbb{C}$. Soit

$$a_n = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |f(n,m)|.$$

Si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n$ converge alors

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n,m)\Big) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\Big(\sum_{m\in\mathbb{Z}} f(n,m)\Big).$$

Résultat 2: Soit $f(x,n)$ une application continue par morceaux de $[0,2\pi]\times\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{C}$. On suppose que la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} f(\cdot,n)$ converge simplement sur $[0,2\pi]$ vers une fonction continue par morceaux notée f. On suppose que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} |f(x,n)|\,dx$ converge. Alors,

$$\int_0^{2\pi} f(x)dx = \sum_{n\in\mathbb{Z}}\int_0^{2\pi} f(x,n)\,dx.$$

Introduisons maintenant quelques notations. Pour $\phi \in C^0_{per}$ et pour $p \in [1, +\infty[$, on nota

$$N_p(\phi) = \Big(\int_0^{2\pi} |\phi(x)|^p dx\Big)^{1/p}.$$

On note de plus

$$N_\infty(\phi) = \sup_{0 \leq x \leq 2\pi} |\phi(x)|.$$

Pour $s \in \mathbb{R}$ et pour $\phi \in C^0_{per}$, on définit $\|\phi\|_s$ par

$$\|\phi\|_s = \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(\phi)|^2 (1+n^2)^s}$$

si cette série converge et par $\|\phi\|_s = +\infty$ sinon. Enfin, on pose:

$$H^s = \{\phi \in C^0_{per} \quad | \quad \|\phi\|_s < +\infty\}.$$

Partie I

Cette partie est consacrée à l'étude des premières propriétés des fonctions N_p et des ensembles H^s.

1) Montrer qu'il existe une constante C_∞ telle que:
$$\forall \phi \in C^0_{per}, \quad N_2(\phi) \leq C_\infty N_\infty(\phi).$$

2) Montrer que
$$\forall \phi \in C^0_{per}, \quad N_4(\phi) \leq N_2(\phi)^{1/2} N_\infty(\phi)^{1/2}.$$

3) Soit $s > 1/2$. Montrer qu'il existe une constante $C(s)$ telle que
$$\forall \phi \in C^1_{per}, \quad N_\infty(\phi) \leq C(s) \|\phi\|_{H^s}.$$

4) Soit $\phi(x)$ la fonction périodique de période 2π qui vaut $\pi - |x|$ pour $-\pi < x < \pi$. Calculer $c_n(\phi)$. Pour quelles valeurs de p a-t-on $\phi \in C^p_{per}$? Pour quelles valeurs de s a-t-on $\phi \in H^s$?

5) Montrer qu'il n'existe pas de constante C telle que
$$\forall \phi \in C^0_{per}, \quad N_\infty(\phi) \leq C N_2(\phi).$$

6) Montrer que si $\phi \in C^1_{per}$, alors $\phi \in H^1$.

7) Donner un exemple de fonction $\phi \in C^0_{per}$, telle que $\|\phi\|_1 < +\infty$ mais qui ne soit pas C^1_{per}.

8) On fixe s un réel positif.

    8.1) Montrer que $C^\infty_{per} \subset H^s$ et que $\|\cdot\|_s$ définit une norme sur l'espace vectoriel C^∞_{per}.

    8.2) Montrer que $\|\cdot\|_s$ est une norme associée à un produit hermitien $< \cdot, \cdot >_s$ sur C^∞_{per} que l'on précisera.

    8.3) Trouver une famille $(g_n; n \in \mathbb{Z})$ d'éléments de C^∞_{per} orthonormée pour $< \cdot, \cdot >_s$ et telle que $\mathrm{Vect}(g_n; n \in \mathbb{Z})$ est dense dans C^∞_{per} pour $\|\cdot\|_s$.

    8.4) Soit $p \in \mathbb{Z}$. On définit pour tout $\phi \in C^\infty_{per}$ l'application $M_p(\phi) = e_p \phi$. Montrer que M_p est un endomorphisme continu de $(C^\infty_{per}, \|\cdot\|_s)$ et montrer que pour $p \neq \pm 1$,
    $$\sup\{\|M_p(\phi)_s\ ,\ \phi \in C^\infty_{per} : \|\phi\|_s = 1\} = (1+p^2)^{s/2}.$$
    Calculer la valeur de ce supremum pour $p = \pm 1$.

Partie II

Une fonction de deux variables $a(x, \xi)$, de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$, périodique de période 2π en la première variable x, est appelée symbole d'ordre m pour m dans $\mathbb{Z}$ s'il existe une constante A telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $\xi \in \mathbb{Z}$,

$$|a(x, \xi)| \leq A(1 + |\xi|)^m$$

et si de plus pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, il existe une constante $A_{\alpha,\beta}$ telle que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \leq A_{\alpha,\beta}(1 + |\xi|)^{m-\alpha}.$$

Soit a un symbole d'ordre m. On définit pour tout $\phi \in C_{per}^\infty$ la fonction $T_a\phi$ par

$$(T_a\phi)(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x, n)c_n(\phi)e_n(x).$$

L'objectif de cete partie est d'étudier les propriétés de T_a.

1.1) Vérifier que T_a est un endomorphisme de C_{per}^∞.

1.2) Dans cette question on suppose que ϕ est seulement C_{per}^p. Montrer que si p est assez grand par rapport à m, alors $T_a\phi$ est correctement définie et est dans C_{per}^0.

2) On suppose que $a(x, \xi) = \alpha(x)$ ne dépend pas de la seconde variable et est une fonction C^∞, 2π-périodique. Vérifier que a est un symbole d'ordre 0. Calculer $T_a\phi$.

3) Vérifier que $a(x, \xi) = i\xi$ (avec $i^2 = -1$) est un symbole d'ordre 1. Pour $\phi \in C_{per}^\infty$, calculer $T_{i\xi}\phi$. Calculer de même $T_{\xi^2}\phi$.

4) Dans cette question $m = 0$.

4.1) Soit pour $p \in \mathbb{Z}$

$$\hat{a}(p, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a(x, \xi)e_p(-x)dx.$$

Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une constante $A_N \in \mathbb{R}$ telle que

$$|\hat{a}(p, \xi)| \leq \frac{A_N}{(1 + |p|)^N}$$

pour tout p et tout ξ.

4.2) Pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on définit sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ la fonction $f_p(x, \xi) = \hat{a}(p, \xi)$, qui de dépend donc pas de la première variable. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$T_a\phi(y) = \sum_{p\in\mathbb{Z}} e_p(y).(T_{f_p}\phi)(y)$$

4.3) Montrer qu'il existe une constante C_0, dépendant de a, telle que

$$\|T_a\phi\|_0 \leq C_0\|\phi\|_0 \ , \ \forall\phi \in C_{per}^\infty.$$

4.4) Soit s un réel positif. Montrer qu'il existe une constante C_s, dépendant de a, telle que

$$\|T_a\phi\|_s \leq C_s\|\phi\|_s \ , \ \forall\phi \in C_{per}^\infty.$$

5) Dans cette question, m désigne un entiers strictement positif. Soit $b(\xi) = 1+i\xi$. Exprimer très simplement $(T_b)^{-1}$ puis calculer $T_a(T_b)^{-m}$. En déduire que pour tout $s \geq 0$ il existe une constante C_s telle que

$$\|T_a\phi\|_s \leq C_s\|\phi\|_{s+m} \ , \ \forall \phi \in C^\infty_{per}.$$

6) Dans cette question, m est un entier strictement négatif. Montrer que pour tout $s \geq 0$ il existe une constante C telle que pour tout $\phi \in C^\infty_{per}$,

$$\|T_a\phi\|_s \leq C\|\phi\|_{s+m}.$$

Partie III

Cette partie est consacrée à l'étude de la composée de deux endomorphismes T_a et T_b où a est un symbole d'ordre m et b un symbole d'ordre m'.

1) Montrer que $a(x,\xi)b(x,\xi)$ est un symbole. Quel est son ordre ?

2) On suppose dans cette question que a ne dépend que de x et que b ne dépend que de ξ. Vérifier que

$$T_{ab} = T_a \circ T_b.$$

Comparer T_{ab} et $T_b \circ T_a$ (donner des exemples).

3) Cette question est consacrée au calcul de $T_a \circ T_b$.

3.1) Montrer que $T_a(T_b\phi)(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$T_a(T_b\phi)(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_m \int_0^{2\pi} c(x,m)e^{im(x-z)}\phi(z)dz$$

où

$$c(x,m) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} a(x,n+m)\hat{b}(n,m)e^{ixn}.$$

3.2) Dans le cas où a est un polynôme en ξ (les coefficients étant des fonctions périodiques de x), montrer que $T_c = T_a \circ T_b$ où

$$c = \sum_{n\geq 0} \frac{(\partial^n_\xi a).(\partial^n_x b)}{i^n n!}.$$

Applications

Cette partie est consacrée à l'utilisation des endomorphismes définis dans les parties précédentes pour résoudre des équations différentielles. Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions C^∞_{per}, et soit $\psi(x) \in C^0_{per}$. On cherche à résoudre l'équation suivante en ϕ

$$-f(x)\phi''(x) + g(x)\phi(x) = \psi(x). \tag{1}$$

On suppose de plus que $f(x) > 0$ et $g(x) > 0$ pour tout x.

1) Montrer que (1) peut se réécrire

$$T_a\phi = \psi$$

et expliciter a. Quel est l'ordre du symbole a ?

2) Vérifier que a^{-1} est un symbole. Quel est son ordre ?

3) Trouver ϕ_1 tel que $T_a\phi_1 - \psi \in H^1$.

4) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe ϕ_n tel que $T_a\phi_n - \psi \in H^n$.