SESSION 1997

Filière MP

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Sujet commun ENS : Ulm et Lyon)

Durée : 6 heures

L'usage de la calculatrice est autorisé

Le problème se propose d'établir certains résultats relatifs à la question suivante, posée par H. S. Shapiro en 1954 : soit n un entier ≥ 2, et soient $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels strictement positifs. A-t-on

$$\frac{x_1}{x_2+x_3} + \frac{x_2}{x_3+x_4} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{x_n+x_1} + \frac{x_n}{x_1+x_2} \geq \frac{n}{2} \quad ?$$

On rappelle le théorème de comparaison de la moyenne arithmétique et de la moyenne géométrique : si n est un entier ≥ 2 et $x_1, \ldots, c_n$ des nombres réels positifs, on a $(x_1 \ldots x_n)^{1/n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n)$.

On note $\mathbf{R}_+$ l'ensemble des nombres réels ≥ 0, et $\mathbf{R}_+^*$ celui des nombres réels > 0. Dans la suite, n désigne un entier ≥ 2 et $x_1, \ldots, x_n$ des nombres réels positifs. En fait on considère plutôt les indices i dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, de sorte que x_{i+j} a un sens pour deux indices $i, j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On a ainsi une famille $\mathbf{x} = (x_i)_{i\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$, $\mathbf{x} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$. On *pose* alors $\mathbf{y} = (y_i)_{i\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$, où $y_i = x_{i+1} + x_{i+2}$ pour $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. On note D_n l'ensemble des $\mathbf{x} = (x_i) \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ tels que $y_i > 0$ pour tout $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_n$ on pose

$$\mathrm{S}_n(\mathbf{x}) = \mathrm{S}_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}} \frac{x_i}{y_i} \quad .$$

Lorsque la valeur de n est fixée, on écrit parfois $\sum_i$ au lieu de $\sum_{i\in\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$.

Partie I

1) Soit $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_2$. Que vaut $\mathrm{S}_2(\mathbf{x})$?

2) Soit $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_3$. Montrer qu'on a $\dfrac{y_2+y_3}{y_1} + \dfrac{y_3+y_1}{y_2} + \dfrac{y_1+y_2}{y_3} \geq 6$, et en déduire qu'on a $\mathrm{S}_3(\mathbf{x}) \geq \dfrac{3}{2}$.

3) Soit $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_n$, satisfaisant à $(\sum_i x_i)^2 \geq \dfrac{n}{2} \sum_i x_i y_i$. Montrer qu'on a $\mathrm{S}_n(\mathbf{x}) \geq \dfrac{n}{2}$ (on pourra comparer $(\sum_i \dfrac{x_i}{y_i})(\sum_i x_i y_i)$ et $(\sum_i x_i)^2$).

4) Supposons $n = 4$. Vérifier qu'on a, pour $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_4$,

$$(\sum_i x_i)^2 \geq 2 \sum_i x_i y_i \ .$$

5) Trouver le plus petit nombre réel $c_n > 0$ tel qu'on ait

$$c_n \sum_i x_i^2 \geq (\sum_i x_i)^2 \qquad \text{quels que soient } x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}.$$

En déduire que pour $n = 5$, $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_5$, on a

$$(\sum_i x_i)^2 \geq \frac{5}{2} \sum_i x_i y_i \ .$$

6) Pour $n = 6$, $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_6$, prouver l'inégalité

$$(\sum_i x_i)^2 \geq 3 \sum_i x_i y_i$$

(on pourra passer par l'inégalité intermédiaire

$$(x_1 + x_4)^2 + (x_2 + x_5)^2 + (x_3 + x_6)^2 \geq \frac{1}{3} (\sum_i x_i)^2 \quad).$$

7) Soit b_n le plus grand nombre réel tel que

$$(\sum_i x_i)^2 \geq b_n \sum_i x_i y_i \quad \text{pour tout } \mathbf{x} = (x_i) \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}.$$

a) Montrer que pour $n = 2, 3, 4, 5$ et 6, on a $b_n = \dfrac{n}{2}$.

b) Montrer que pour $n \geq 7$, on a $b_n \leq 3$ (prendre $x_k = \ldots = x_n = 0$ pour k bien choisi).

c) Supposons $n \geq 7$. Pour $\mathbf{x} = (x_i) \in (\mathbf{R}_+)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ et $i = 1, 2, 3$, on pose $\mathrm{A}_i(\mathbf{x}) = \sum x_j$ où j parcours les classes modulo n des entiers k compris entre 1 et n et congrus à i modulo 3.

Montrer que si n est multiple de 3, on a

$$\mathrm{A}_2(\mathbf{x})\mathrm{A}_3(\mathbf{x}) + \mathrm{A}_3(\mathbf{x})\mathrm{A}_1(\mathbf{x}) + \mathrm{A}_1(\mathbf{x})\mathrm{A}_2(\mathbf{x}) \geq \sum_i x_i y_i \ .$$

Si n n'est pas multiple de 3, montrer qu'il existe $j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tel que, posant $\mathbf{x}' = (x_{i+j})_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ (ce qui revient à permuter circulairement les x_i), on ait

$$\mathrm{A}_2(\mathbf{x}')\mathrm{A}_3(\mathbf{x}') + \mathrm{A}_3(\mathbf{x}')\mathrm{A}_1(\mathbf{x}') + \mathrm{A}_1(\mathbf{x}')\mathrm{A}_2(\mathbf{x}') \geq \sum_i x'_i y'_i \ .$$

(on remarquera que la plupart des termes $x'_i x'_k$ apparaissant dans le membre de droite apparaissent aussi dans celui de gauche et on choisira j de façon à pouvoir comparer les quantités restantes).

En déduire qu'on a $b_n = 3$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose n *pair* ≥ 4. Si $j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$, on notera $(-1)^j$ le nombre $(-1)^{\tilde{j}}$, où $\tilde{j}$ est un entier quelconque de classe j dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Fixons $\alpha \in [0,1[$ et $\mathbf{t} = (t_i) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$. Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, posons $x_i(\varepsilon) = 1 + (-1)^i \alpha + t_i \varepsilon$ pour $i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ et $\mathbf{x}(\varepsilon) = (x_i(\varepsilon)) \in \mathbf{R}^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$.

1) Prouver que $\mathbf{x}(\varepsilon)$ appartient à D_n pour ε assez petit et que l'on a

$$\mathrm{S}_n(\mathbf{x}(\varepsilon)) = \frac{n}{2} + \mathrm{Q}(t_1, \ldots, t_n)\, \varepsilon^2 + \mathrm{O}(\varepsilon^3) \qquad \text{quand } \varepsilon \to 0 \ ,$$

où Q est une forme quadratique en les t_i que l'on calculera.

2) Soient $(e_j)_{j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ la base canonique de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ (de sorte que $e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$, avec $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ii} = 1$) et T l'endomorphisme de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ défini par $\mathrm{T}(e_j) = (-1)^j e_{j+1}$. Trouver une base de vecteurs propres pour T et les valeurs propres correspondantes (on rappelle que pour l'endomorphisme S de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ donné par $\mathrm{S}(e_j) = e_{j+1}$ les vecteurs $f_\omega = \sum_j \omega^j e_j$, où ω parcourt les racines n-ièmes de l'unité dans $\mathbf{C}$, forment une base de vecteurs propres).

3) Montrer que pour n pair ≥ 14, il existe $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_n$ tel que $\mathrm{S}_n(\mathbf{x}) < \dfrac{n}{2}$.

Partie III

Soit n un entier ≥ 2 ; on pose $s_n = \inf\limits_{\mathbf{x} \in \mathrm{D}_n} \mathrm{S}_n(\mathbf{x})$.

1) Pour m entier ≥ 1, prouver qu'on a $\dfrac{s_{mn}}{nm} \leq \dfrac{s_n}{n}$ ·

2) Pour m entier positif, montrer qu'on a $s_{n+m} \leq s_n + \frac{1}{2}(m+1)$ (considérer des éléments de D_{n+m} de la forme $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_n, \ldots, x_n)$).

3) En déduire que la suite $(\dfrac{s_n}{n})$ admet pour limite $\rho = \inf\limits_n \dfrac{s_n}{n}$. Démontrer qu'on a $\rho < \frac{1}{2}$.

Partie IV

1) Prouver qu'il existe $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_n$ tel que $s_n = \mathrm{S}_n(\mathbf{x})$.

Dans les questions 2) à 4) on suppose $n = 7$. Pour toute partie I de $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$, on note D_I l'ensemble des $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_7$ tels que $x_i = 0$ si et seulement si $i \in \mathrm{I}$. Ainsi $\mathrm{D}_\emptyset = (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}}$, et D_7 est l'union disjointe des parties non vides D_I, où I parcourt les sous-ensembles de $\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}$ tels que $i \in \mathrm{I}$ entraîne $i+1 \notin I$.

2) Montrer qu'on a $\mathrm{S}_7(\mathbf{x}) \geq 4$ pour $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_{\{0,2,4\}}$ ou $\mathbf{x} \in \mathrm{D}_{\{0,3\}}$.

3) Considérons la restriction σ de S_7 à $\mathrm{D}_{\{0,2\}}$. C'est une fonction de 5 variables strictement positives x_1, x_3, x_4, x_5, x_6. Exprimer σ en fonction de $y_1 = x_3$, $y_3 = x_4 + x_5$, $y_4 = x_5 + x_6$, $y_5 = x_6$, $y_6 = x_1$. Montrer que si $\xi = (\xi_i)$ est un minimum local de σ, alors $\sigma(\xi) = \lambda^4 + 4\lambda + \lambda^{-4} - 2$, où λ est la racine positive de $x^8 + x^5 - 1 = 0$. En admettant l'inégalité $e^{-1} + e^{-1/2} < 1$, montrer qu'on a $\lambda > 1 - \frac{1}{8}$, et en déduire $\sigma(\xi) > \frac{7}{2}$.

4) On démontrerait de façon analogue (mais plus compliquée) que si ξ est un minimum local de $\mathrm{S}_{7|\mathrm{D}_\mathrm{I}}$ pour $\mathrm{I} = \{0\}$ ou $\mathrm{I} = \emptyset$, alors $\mathrm{S}_7(\xi) \geq \frac{7}{2}$. Admettant ce résultat, prouver qu'on a $s_7 = \frac{7}{2}$.

Partie V

1) Soient $a_1, \ldots, a_n$ et $b_1, \ldots, b_n$ deux suites de n nombres réels, la première croissante, la seconde décroissante. Montrer qu'on a

$$\sum_{i=1}^{n} a_i\, b_{\sigma(i)} \geq \sum_{i=1}^{n} a_i\, b_i \qquad \text{pour tout permutation } \sigma \text{ de } \{1, \ldots, n\}\ .$$

2) Soit $\mathbf{x} = (x_i) \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$. Soit $m_1, \ldots, m_n$ la suite des nombres x_{i+1}/x_i rangés dans l'ordre croissant. Démontrer l'inégalité

$$\mathrm{S}_n(\mathbf{x}) \geq \frac{1}{m_1(1+m_n)} + \frac{1}{m_2(1+m_{n-1})} + \ldots + \frac{1}{m_n(1+m_1)}\ \cdot$$

3) Pour $i = 1, \ldots, n$, posons

$$c_i = m_i\, m_{n+1-i} \qquad \text{et} \qquad r_i = \frac{1}{m_i(1+m_{n+1-i})} + \frac{1}{m_{n+1-i}(1+m_i)}\ \cdot$$

Prouver qu'on a $r_i \geq \dfrac{1}{c_i}$ si $c_i \geq 1$ et $r_i \geq \dfrac{2}{c_i + \sqrt{c_i}}$ si $c_i \leq 1$. On pose $c_i = e^{t_i}$ avec $t_i \in \mathbf{R}$; montrer qu'on a $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} t_i = 0$.

4) Soient f_1 et f_2 deux fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}_+$. Démontrer que l'ensemble des fonctions convexes $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ vérifiant $g \leq f_1$ et $g \leq f_2$ possède un plus grand élément.

5) On prend pour f_1 et f_2 les fonctions $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{e^x + e^{x/2}}$ · Soit g la fonction convexe obtenue à la question 4) ; on pose $\gamma = g(0)$. Prouver qu'on a $\gamma < \frac{1}{2}$ et $s_n \geq n\gamma$.

6) Par le même choix de f_1 et f_2, montrer qu'en fait g a la forme suivante : il existe $x_- < 0$ et $x_+ > 0$ tels qu'on ait $g(x) = f_1(x)$ pour $x \geq x_+$, $g(x) = f_2(x)$ pour $x \leq x_-$, et que f soit affine dans l'intervalle $[x_-, x_+]$.

7) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour n assez grand on peut trouver $\mathbf{x} = (x_i) \in (\mathbf{R}_+^*)^{\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ satisfaisant à $\mathrm{S}_n(\mathbf{x})/n \leq \gamma + \varepsilon$. En déduire l'égalité $\gamma = \rho$ (cf. III.3 pour la définition de ρ).