

SESSION 2000  
Filière PC  
MATHÉMATIQUES

(Épreuve commune aux ENS : Ulm, Lyon et Cachan)

Durée : 4 heures

*L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.*

**Avertissement :** Les labels **Qn**, avec  $0 \leq n \leq 13$  indiquent les questions, certaines d'entre elles étant découpées en sous questions numérotées de 1 à  $j$ , avec  $j \leq 5$ . Le problème s'achève avec l'étude de deux exemples.

### Notations

Le problème concerne l'étude des matrices carrées à coefficients réels, dont l'ensemble est noté  $M_n(\mathbb{R})$ . La matrice nulle est notée  $0_n$  et la matrice identité est  $I_n$ . L'ensemble  $GL_n(\mathbb{R})$  des matrices inversibles forme un groupe (dit *groupe linéaire*) pour la multiplication des matrices. Ses éléments sont les matrices de déterminant non nul.

On notera  $O(n)$  le groupe orthogonal et  $S(n)$  l'ensemble des matrices symétriques réelles à  $n$  lignes. On a donc  $O(n) \subset GL_n(\mathbb{R}) \subset M_n(\mathbb{R})$  et  $S(n) \subset M_n(\mathbb{R})$ . Rappelons que  $O(n)$  est l'ensemble des matrices  $M$  de  $M_n(\mathbb{R})$  qui satisfont  ${}^tMM = I_n$  ou, ce qui revient au même,  $M^tM = I_n$ .

On identifie canoniquement les vecteurs de  $\mathbb{R}^n$  aux matrices colonnes à  $n$  lignes. En particulier,  $M_1(\mathbb{R})$  est identifié à  $\mathbb{R}$ .

On admettra l'énoncé suivant (interpolation polynomiale) : si  $d_1 < \dots < d_n$  et  $a_1, \dots, a_n$  sont des nombres réels, il existe un polynôme  $p \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $p(d_j) = a_j$  pour tout  $j = 1, \dots, n$ .

### Fonctions de matrices

**Q0** Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $q(PMP^{-1}) = Pq(M)P^{-1}$  pour tout  $q \in \mathbb{R}[X]$ .

**Q1** Soit  $M \in M_n(\mathbb{R})$  et  $p, q$  deux polynômes à coefficients réels. On suppose que  $p(\lambda) = q(\lambda)$  pour chaque valeur propre (réelle ou complexe) de  $M$  et que  $M$  est diagonalisable. Montrer que  $p(M) = q(M)$ .

**Q2** Si  $M \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable et si  $p$  est un polynôme tel que  $p(\lambda) = \exp \lambda$  pour toute valeur propre de  $M$ , on note  $\exp M$  (l'*exponentielle* de  $M$ ) la matrice  $p(M)$ . Montrer que cette définition n'est pas ambiguë.

**Q3** Soit  $D \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonale et  $t \in \mathbb{R}$ . Expliciter la matrice  $\exp(tD)$ . Montrer que la fonction à valeurs vectorielles  $h : t \mapsto \exp(tD)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .

**Q4** 1. Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  et  $h : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  deux fonction continûment dérivables. Montrer que l'application  $f : \mathbb{R} \rightarrow M_n(\mathbb{R})$  définie par  $f(t) = g(t)h(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et que

$$f'(t) = g(t)h'(t) + g'(t)h(t).$$

2. En déduire que, si  $M \in M_n(\mathbb{R})$  est diagonalisable, alors la fonction  $h : t \mapsto \exp(tM)$  est dérivable et que  $h'(t) = Mh(t) = h(t)M$ .

## Matrices symétriques définies positives

- Q5**
1. Si  $M \in M_n(\mathbb{R})$  et  $X \in \mathbb{R}^n$ , vérifier que  ${}^tXMX$  est un nombre. Exprimer ce nombre au moyen des coefficients de  $X$  et  $M$ . Que reconnaissez-vous lorsque  $M = I_n$  ?  
Si  $M \in M_n(\mathbb{R})$ , on définit une application  $f_M : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  par  $f_M(X) = {}^tXMX$ . On pourra remarquer que  $f_{{}^tM} = f_M$ .
  2. Si  $M \in GL_n(\mathbb{R})$ , exprimer  $f_{M^{-1}}(X)$  sous la forme  $f_M(Y)$  pour un vecteur  $Y$  convenable.
  3. Soit  $M \in S(n)$ . On dit que  $M$  est *définie positive* si  $X \neq 0$  implique  $f_M(X) > 0$ . On désigne par  $S^+(n)$  l'ensemble des matrices symétriques définies positives. Montrer que  $M \in S^+(n)$  entraîne que  $M$  est inversible et que  $M^{-1} \in S^+(n)$ .
  4. Soit  $M \in S^+(n)$  et  $P \in GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  ${}^tPMP \in S^+(n)$ .
  5. Soit  $N \in S(n)$ . Montrer que  $\exp N \in S^+(n)$ .

**Q6** Soit  $M \in S^+(n)$ .

1. Montrer qu'il existe  $P \in O(n)$  et une matrice diagonale  $D$ , réelle avec  $d_{ii} > 0$  pour tout  $i$ , telles que  $M = PDP^{-1}$ .
2. Soit  $p$  un polynôme réel tel que  $p(\lambda) = \sqrt{\lambda}$  pour toute valeur propre  $\lambda$  de  $M$ . Montrer que la matrice  $N = p(M)$  ne dépend pas du choix de  $p$  et satisfait  $N^2 = M$ .  
On appelle  $N$  la *racine carrée* de  $M$  et on note  $N = \sqrt{M}$ .
3. Montrer que  $\sqrt{M} \in S^+(n)$ . En déduire que  $N \mapsto N^2$  est une bijection de  $S^+(n)$  dans lui-même.
4. Montrer que  $\sqrt{M^{-1}} = \sqrt{M}^{-1}$ .

**Q7** Par une méthode analogue, montrer que  $\exp : S(n) \rightarrow S^+(n)$  est une bijection (on pourra d'abord construire l'application réciproque).

**Q8** Soit  $A \in GL_n(\mathbb{R})$ . On définit  $M = {}^tAA$ .

1. Montrer que  $M \in S^+(n)$ .
2. Soit  $N = \sqrt{M}$ , puis  $P = AN^{-1}$ . Montrer que  $P \in O(n)$ .  
L'égalité  $A = PN$ , avec  $P \in O(n)$  et  $N \in S^+(n)$  est appelée *décomposition polaire* de  $A$ .
3. Montrer que la décomposition polaire de  $A$  est unique.

## Structure des groupes polaires

Si  $G$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$ , nous dirons que  $G$  est *polaire* s'il vérifie les deux propriétés suivantes

- $G$  est stable par transposition :  $A \in G$  implique  ${}^tA \in G$ ,
- si  $M \in G \cap S^+(n)$ , alors  $\sqrt{M} \in G$ .

**Q9** Soit  $G$  un sous-groupe polaire de  $GL_n(\mathbb{R})$ . Montrer que  $G$  est stable par la décomposition polaire : si  $A = PM$  avec  $A \in G$ ,  $P \in O(n)$  et  $M \in S^+(n)$ , alors  $P, M \in G$ . Montrer que  $G \cap O(n)$  est un sous-groupe multiplicatif.

**Q10** Dans cette question et jusqu'à la fin du problème,  $J \in M_n(\mathbb{R})$  est une matrice vérifiant  ${}^tJ = \epsilon J$  et  $J^2 = \alpha I_n$ , où  $\epsilon, \alpha \in \{-1, +1\}$ . On définit l'ensemble

$$G = \{A \in M_n(\mathbb{R}); {}^tAJA = J\}.$$

1. Montrer que  $G$  est un sous-groupe de  $GL_n(\mathbb{R})$  et que  $\det A = \pm 1$  pour tout  $A \in G$ .

2. Montrer que  $G$  est stable par transposition.
3. Soit  $M \in S^+(n)$ . Notant  $U$  l'ensemble formé par les valeurs propres  $\lambda_j$  de  $M$  et leurs inverses  $1/\lambda_j$ , montrer qu'il existe un polynôme  $p \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $p(\lambda) = \sqrt{\lambda}$  pour tout  $\lambda \in U$ . En déduire que  $p(M) = \sqrt{M}$  et  $p(M^{-1}) = \sqrt{M}^{-1}$ .
4. Soit  $M \in G \cap S^+(n)$ . Montrer que  $q(M^{-1})J = Jq(M)$  pour tout polynôme  $q \in \mathbb{R}[X]$  (on pourra commencer par le cas des monômes).
5. En déduire que  $G$  est un groupe polaire.

**Q11** 1. On définit l'ensemble

$$\hat{G} = \{N \in M_n(\mathbb{R}); {}^tNJ + JN = 0_n\}.$$

Montrer que  $\hat{G}$  est un sous-espace vectoriel de  $M_n(\mathbb{R})$  et que  $N \in \hat{G}$  implique  ${}^tN \in \hat{G}$ .

2. Soit  $N \in \hat{G}$  une matrice diagonalisable,  $t \in \mathbb{R}$  et soit  $M(t) = \exp(tN)$ . Calculer

$$\frac{d}{dt} {}^tM(t)JM(t)$$

et en déduire que  $M(t) \in G$ .

3. Réciproquement, soit  $N \in M_n(\mathbb{R})$  une matrice diagonalisable telle que  $\exp(tN) \in G$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Montrer que  $N \in \hat{G}$ .

**Q12** Soit  $M \in G \cap S^+(n)$ .

1. Soit  $N$  la matrice symétrique réelle telle que  $\exp N = M$ . Si  $t \in \mathbb{R}$ , montrer qu'il existe un polynôme  $r \in \mathbb{R}[X]$  tel que  $r(M) = \exp(tN)$  et  $r(M^{-1}) = \exp(-tN)$ .
2. En déduire que  $\exp(tN) \in G$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .
3. Conclure que  $\exp : \hat{G} \cap S(n) \rightarrow G \cap S^+(n)$  est une bijection.

**Q13** Vérifier que  $(P, N) \mapsto P \exp N$  réalise une bijection de  $H \times V$  dans  $G$ , où  $H$  est un sous-groupe de  $O(n)$  et  $V$  est un sous-espace vectoriel de  $S(n)$ .

**Exemple 1 :** Si  $n = p + q$ , avec  $p, q \geq 1$ , on choisit  $J$  de la façon suivante (décomposition par blocs) :

$$J = \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & -I_q \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la dimension de  $V$ .
2. Montrer que l'application

$$(A, B) \mapsto \begin{pmatrix} A & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & B \end{pmatrix}$$

est une bijection de  $O(p) \times O(q)$  dans  $H$ .

**Exemple 2 :** De même, si  $n = 2m$ , avec  $m \in \mathbb{N}^*$ , on choisit  $J$  sous la forme

$$J = \begin{pmatrix} 0_m & I_m \\ -I_m & 0_m \end{pmatrix}.$$

1. Calculer la dimension de  $V$ .
2. Montrer que  $H$  est l'ensemble des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$$

où  ${}^tAA + {}^tBB = I_m$  et  ${}^tAB = {}^tBA$ .