

SESSION 2003

Filière PC

(Épreuve commune aux ENS de Paris, Lyon et Cachan)

## MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

Les définitions importantes sont signalées par un signe  $\rightsquigarrow$ . Les résultats admis sont encadrés par des  $\bullet$ . Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

Pour tout intervalle  $I \subset \mathbb{R}$ , et tout entier naturel  $k$ , on note simplement  $\mathcal{C}^k = \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$  et à valeurs réelles. L'espace des fonctions continues,  $\mathcal{C}^0(I)$ , est noté  $\mathcal{C}(I)$ . Si  $I$  est un intervalle fermé  $[a, b]$ , on note de plus  $\mathcal{C}_0(I)$  l'espace des fonctions continues sur  $I$  s'annulant en  $a$  et en  $b$ , et  $\mathcal{C}_0^k(I)$  l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $I$ , nulles en  $a$  et en  $b$  ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ . De façon analogue,  $\mathcal{C}_0^k(\mathbb{R})$  désigne l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur  $\mathbb{R}$  admettant des limites nulles en  $-\infty$  et  $+\infty$ , ainsi que toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre  $k$ .

Dans tout le problème,  $E$  est une fonction à valeurs réelles de deux variables réelles, notées  $q$  et  $p$ , et  $E$  est supposée au moins de classe  $\mathcal{C}^3$ , c'est-à-dire  $E \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ . Les dérivées partielles premières de  $E$  sont ainsi notées

$$\frac{\partial E}{\partial q}(q, p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial E}{\partial p}(q, p),$$

et les dérivées partielles secondes de  $E$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(q, p), \quad \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(q, p) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(q, p).$$

Le problème concerne la minimisation de l'intégrale

$$\int_I E(\rho(x), \rho'(x)) dx$$

pour  $\rho$  appartenant à un ensemble  $\mathcal{A}$  de fonctions admissibles à préciser (inclus dans  $\mathcal{C}^1(I)$ ).

## I Résultats préliminaires

### 1 Un lemme fondamental

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ , et

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b]) = \{h \in \mathcal{C}^1([a, b]); h(a) = h(b) = 0\}.$$

i)

Déterminer toutes les fonctions  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  telles que, pour tout  $h \in \mathcal{B}$ ,

$$\int_a^b f(x) h'(x) dx = 0.$$

**Indication :** On pourra utiliser des fonctions  $h$  de la forme

$$h(x) = \int_a^x (f(x) - c) dx$$

ii)

Déterminer, en utilisant i), l'ensemble des couples  $(f, g) \in \mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$  tels que, pour tout  $h \in \mathcal{B}$ ,

$$\int_a^b (f(x)h(x) + g(x)h'(x)) dx = 0.$$

Parmi ces couples, peut-on avoir  $g(x) = |x - (a + b)/2|$  ?

## 2 Mesure des courbes et surfaces

i)

On considère un arc de courbe défini par une équation cartésienne,

$$\Gamma = \{(x, \varphi(x)); x \in [a, b]\},$$

avec  $a < b$  et  $\varphi \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . Quelle est la longueur de l'arc  $\Gamma$  ?

ii)

Soient  $\alpha \in ]0, 2\pi[$  et  $R > r > 0$ . Quelle est l'aire de

$$S = \{(\rho \cos \omega, \rho \sin \omega); r \leq \rho \leq R \text{ et } 0 \leq \omega \leq \alpha\} \quad ?$$

iii)

On suppose que l'arc  $\Gamma$  défini en i) ne coupe pas l'axe  $Ox$  et on considère  $\Sigma$  la surface de révolution obtenue par rotation de  $\Gamma$  autour de cet axe.

• On admet que l'aire de  $\Sigma$  est égale à

$$A = 2\pi \int_a^b \varphi(x) \sqrt{1 + \varphi'(x)^2} dx \quad \bullet$$

Vérifier cette formule dans le cas où  $\Gamma$  est un segment de droite. On pourra s'aider d'un dessin, et utiliser ii).

## 3 Méthode de séparation des variables

Soient  $I$  et  $J$  des intervalles de  $\mathbb{R}$ . On suppose que  $G \in \mathcal{C}^1(J)$  ne s'annule pas. Soient  $a \in I$ ,  $\alpha \in J$ , et  $\rho \in \mathcal{C}^1(I, J)$  telle que  $\rho(a) = \alpha$  et

$$\rho'(x) = G(\rho(x))$$

pour tout  $x \in I$ . Calculer

$$\int_a^{\rho(x)} \frac{dr}{G(r)}.$$

## II Minimisation sur un intervalle $I$ borné

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tels que  $a < b$ . Comme dans la partie I, on notera

$$\mathcal{B} \stackrel{\text{déf}}{=} \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b]).$$

À toute fonction  $\rho \in \mathcal{C}^1([a, b])$  on associe le nombre réel

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_a^b E(\rho(x), \rho'(x)) dx.$$

### 1

Soient  $\rho$  et  $h \in \mathcal{C}^1([a, b])$ . On considère  $e_{\rho, h}$ , la fonction d'une variable réelle  $t$  définie par

$$e_{\rho, h}(t) = \mathcal{E}[\rho + th].$$

Montrer que  $e_{\rho, h} \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$  et exprimer ses dérivées en 0

$$\frac{de_{\rho, h}}{dt}(0) \text{ et } \frac{d^2e_{\rho, h}}{dt^2}(0)$$

à l'aide de  $\rho, \rho', h, h'$  et des dérivées partielles de  $E$ .

### 2

Soient  $\alpha$  et  $\beta \in \mathbb{R}$ . On suppose qu'il existe  $\rho \in \mathcal{C}^1([a, b])$  tel que  $\rho(a) = \alpha, \rho(b) = \beta$ , réalisant le minimum de  $\mathcal{E}[\rho]$  sous cette contrainte, c'est-à-dire :

$$\mathcal{E}[\rho] = \min_{\eta \in \mathcal{A}} \mathcal{E}[\eta], \quad \text{où } \mathcal{A} \stackrel{\text{déf}}{=} \{\eta \in \mathcal{C}^1([a, b]); \eta(a) = \alpha, \eta(b) = \beta\}. \quad (1)$$

#### i)

Soit  $h \in \mathcal{B}$ . Quelle est alors la valeur de

$$\frac{de_{\rho, h}}{dt}(0) \quad ?$$

#### ii)

Déduire de ce qui précède que la fonction

$$x \in [a, b] \mapsto \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x))$$

est de classe  $\mathcal{C}^1$  et telle que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(x), \rho'(x)) \right) = \frac{\partial E}{\partial q}(\rho(x), \rho'(x)) \quad (2)$$

pour tout  $x \in [a, b]$ .

$\rightsquigarrow$  Désormais, on appelle **extrémale** de  $\mathcal{E}$  toute fonction  $\rho \in \mathcal{A}$ , au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ , telle que l'équation (2) soit satisfaite pour tout  $x \in [a, b]$ .

iii)

Soit  $\rho$  une extrémale de  $\mathcal{E}$ . Calculer

$$E(\rho(b), \rho(b)) - \rho'(b) \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(b), \rho'(b)) - E(\rho(a), \rho'(a)) + \rho'(a) \frac{\partial E}{\partial p}(\rho(a), \rho'(a)).$$

3

On se place dans le même cadre qu'à la question 2 ci-dessus, en supposant que (1) a lieu pour  $\rho$  de classe  $\mathcal{C}^2$ .

i)

Soit  $h \in \mathcal{B}$ . Quel est le signe de

$$\frac{d^2 e_{\rho, h}}{dt^2}(0) \quad ?$$

ii)

Déduire de ce qui précède que, pour tout  $h \in \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b])$  :

$$\int_a^b (P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2) dx \geq 0, \quad (3)$$

avec

$$P(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial p^2}(\rho(x), \rho'(x)), \quad Q(x) = \frac{\partial^2 E}{\partial q^2}(\rho(x), \rho'(x)) - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial^2 E}{\partial q \partial p}(\rho(x), \rho'(x)) \right). \quad (4)$$

A quelle(s) classe(s)  $\mathcal{C}^k$  appartiennent  $P$  et  $Q$  ? On notera par la suite

$$\mathcal{Q}[h] = \int_a^b (P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2) dx.$$

#### 4 Exemples

i)

Dans cette question, on considère la fonction  $E(q, p) = \sqrt{1 + p^2}$ . A quoi correspond, en langage commun, le problème de minimisation de  $\mathcal{E}$  ? Trouver toutes les fonctions  $\rho$  satisfaisant l'équation (2). Montrer qu'il en existe une et une seule appartenant à l'ensemble  $\mathcal{A}$  et l'expliciter. Pour cette solution et les fonctions  $P, Q$  définies par (4), l'inégalité (3) est-elle satisfaite ?

ii)

Dans cette question, on considère la fonction  $E(q, p) = q \sqrt{1 + p^2}$ . A quoi correspond le problème de minimisation de  $\mathcal{E}$  ? Montrer que, si  $\rho$  satisfait (2), il existe une constante  $C$  telle que

$$\rho'(x)^2 = \frac{\rho(x)^2 - C^2}{C^2}. \quad (5)$$

Supposons  $C^2 < \alpha < \beta$ . Montrer, en utilisant la méthode de séparation des variables de la question I.3, que la recherche de fonctions  $\rho \in \mathcal{A}$ , strictement croissantes et satisfaisant (5) sur  $[a, b]$ , se ramène au calcul de la primitive d'une fonction que l'on explicitera.

NB : le calcul de la primitive n'est pas demandé.

#### 5 Étude de $\mathcal{Q}[h]$

On cherche ici des conditions sur les fonctions  $P$  et  $Q$  assurant l'inégalité (3) c'est-à-dire, avec la notation introduite à la question 3.ii),

$$\mathcal{Q}[h] \geq 0 \quad \text{quel que soit } h \in \mathcal{C}^1([a, b]) \cap \mathcal{C}_0([a, b]). \quad (6)$$

i)

Montrer que (6) implique

$$P(x) \geq 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b]. \quad (7)$$

**Indication :** on pourra construire une famille de fonctions auxiliaires  $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_0^1([-\varepsilon, \varepsilon])$ , où  $\varepsilon > 0$  est un paramètre destiné à tendre vers 0, telles que

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_\varepsilon(x)^2 dx \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g'_\varepsilon(x)^2 dx \geq \frac{C}{\varepsilon},$$

pour un certain  $C > 0$  indépendant de  $\varepsilon$ .

ii)

Supposons qu'il existe une fonction  $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$  satisfaisant

$$P(x) (Q(x) + w'(x)) = w(x)^2 \quad (8)$$

pour tout  $x \in [a, b]$ . A-t-on alors (6) ? (On pourra interpréter (8) comme l'annulation du discriminant d'une forme quadratique.)

iii) **Étude de l'équation (8)**

On suppose ici

$$P(x) > 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

Étant donné  $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$ , une solution  $u$  de l'équation différentielle du premier ordre

$$P u' + w u = 0$$

peut-elle s'annuler ? Si une telle solution est de classe  $\mathcal{C}^2$ , exprimer  $(Pu)'$  sans utiliser  $u'$ .

On suppose qu'il existe une solution  $v$  de classe  $\mathcal{C}^2$  de l'équation différentielle du second ordre

$$-(Pv) + Qv = 0 \quad (9)$$

ne s'annulant pas sur  $[a, b]$ . Construire alors  $w \in \mathcal{C}^1([a, b])$  vérifiant (8) pour tout  $x \in [a, b]$ .

### III Minimisation sur un intervalle $I$ infini

Dans toute cette partie, la fonction  $E$  est choisie de la forme

$$E(q, p) = F(q) + \frac{1}{2} K(q) p^2, \quad (10)$$

où les fonctions  $F$  et  $K \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$  satisfont les propriétés supplémentaires

$$K(q) \geq K_0 > 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R}, \quad (11)$$

$$\begin{cases} F(q) > 0 \quad \text{pour tout } q \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \\ F(\alpha) = F(\beta) = 0, \quad \frac{dF}{dq}(\alpha) = \frac{dF}{dq}(\beta) = 0, \\ \frac{d^2F}{dq^2}(\alpha) > 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2F}{dq^2}(\beta) > 0. \end{cases} \quad (12)$$

On suppose pour fixer les idées  $\alpha < \beta$ .

#### 1 Préambule

i)

Montrer qu'il existe une unique fonction polynomiale de degré 4 et de coefficient dominant 1 satisfaisant (12).

ii)

Pour tout nombre  $\theta > 0$ , on définit  $\mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$  comme l'ensemble des fonctions  $\rho \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$  telles que

$$\begin{cases} \rho(x) - \alpha = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{\theta x}) & \text{lorsque } x \rightarrow -\infty, \\ \rho(x) - \beta = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{et, pour tout } m \leq k \quad \rho^{(m)}(x) = \mathcal{O}(e^{-\theta x}) & \text{lorsque } x \rightarrow +\infty. \end{cases} \quad (13)$$

Montrer que, si  $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$ , alors la fonction  $x \mapsto E(\rho(x), \rho'(x))$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Dans ce cas on définit

$$\mathcal{E}[\rho] = \int_{-\infty}^{\infty} E(\rho(x), \rho'(x)) dx.$$

$\rightsquigarrow$  Par extension de la définition donnée à la question II.2.ii), on appelle extrémale de  $\mathcal{E}$  une fonction  $\rho$  appartenant à  $\mathcal{A}_\theta^2(\mathbb{R})$  pour au moins un nombre  $\theta > 0$  et satisfaisant (2) pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

iii)

Montrer que pour toute extrémale de  $\mathcal{E}$ , on a

$$\frac{1}{2} K(\rho(x)) \rho'(x)^2 = F(\rho(x)) \quad (14)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2 Étude de l'équation (14)

### i) Exemple

On suppose dans cette question que  $K$  est la fonction constante égale à  $K_0$  et  $F$  est la fonction polynomiale de la question 1.i) ci-dessus. En s'inspirant de la méthode de séparation de variables de la question I.3, calculer  $\rho$  satisfaisant (14) et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \rho(x) = \alpha \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \rho(x) = \beta.$$

Déterminer les couples  $(\theta, k)$  pour lesquels  $\rho \in \mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$ .

ii)

On revient au cas général. Montrer qu'il existe une fonction  $G \in \mathcal{C}^2([\alpha, \beta], \mathbb{R}^+)$  telle que

$$G(q)^2 = \frac{2F(q)}{K(q)}$$

pour tout  $q \in [\alpha, \beta]$ . Montrer que plus que

$$\begin{cases} G(q) > 0 & \text{pour tout } q \in ]\alpha, \beta[, \\ G(\alpha) = G(\beta) = 0, \\ \frac{dG}{dq}(\alpha) > 0 & \text{et} \quad \frac{dG}{dq}(\beta) < 0. \end{cases} \quad (15)$$

- On admettra que (15) suffit pour construire  $\rho \in \mathcal{A}_\theta^1(\mathbb{R})$  tel que

$$\begin{cases} \rho'(x) = G(\rho(x)) & \text{pour tout } x \in \mathbb{R} \\ \rho(0) = \rho_0, \end{cases}$$

avec

$$\theta < \min \left( \frac{dG}{dq}(\alpha), -\frac{dG}{dq}(\beta) \right),$$

quel que soit  $\rho_0 \in ]\alpha, \beta[$ . •

À quels  $\mathcal{A}_\theta^k(\mathbb{R})$  appartient cette fonction  $\rho$  ?

### 3

Désormais,  $\rho$  désigne une solution croissante de (14), construite grâce à la question 2.ii) ci-dessus. On associe à  $\rho$  les fonctions  $P$  et  $Q$  comme dans la partie II, par les formules (4).

i)

Exprimer les fonctions  $P$  et  $Q$  à l'aide des fonctions  $K$ ,  $F$  et  $\rho$ . Montrer que  $P$  et  $Q$  sont bornées sur  $\mathbb{R}$  et que

$$P(x) \geq K_0 \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

ii)

Montrer que la fonction  $v = \rho'$  est solution de l'équation différentielle (9) sur  $\mathbb{R}$ .

iii)

Montrer qu'il existe  $C_1$  et  $C_2 > 0$  tels que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| K(\rho(x)) \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right| \leq C_1 \quad \text{et} \quad \left| \frac{d}{dx} \left( K(\rho(x)) \frac{\rho''(x)}{\rho'(x)} \right) \right| \leq C_2.$$

iv)

Soit  $\omega > 0$ . En s'inspirant des questions II.5.ii) et II.5.iii), montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (P(x) h'(x)^2 + Q(x) h(x)^2) dx \geq 0$$

pour tout  $h \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R})$  tel que

$$\begin{cases} h(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{et} & h'(x) = \mathcal{O}(e^{\omega x}) & \text{lorsque } x \rightarrow -\infty, \\ h(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{et} & h'(x) = \mathcal{O}(e^{-\omega x}) & \text{lorsque } x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$