SESSION 1998

Filière PC

MATHÉMATIQUES

(Sujet commun aux ENS : Lyon, Ulm et Cachan)

L'usage de calculatrices électroniques de poche à alimentation autonome, non imprimantes et sans document d'accompagnement, est autorisé. Cependant, une seule calculatrice à la fois est admise sur la table ou le poste de travail, et aucun échange n'est autorisé entre les candidats.

Le problème aborde quelques aspects de la théorie des polynômes orthogonaux. La première partie introduit une famille de polynômes comme étant des "vecteurs propres", la deuxième partie adapte à cette famille un produit scalaire afin d'en faire des "polynômes orthogonaux". La troisième partie donne d'autres moyens (formule de **Rodrigues** et fonctions génératrices) d'obtenir ces polynômes. La dernière partie, largement indépendante de la troisième, aborde, dans le cas particulier des polynômes de **Laguerre**, la question de la convergence en moyenne quadratique.

1 Etude algébrique

Dans cette partie, on introduit les polynômes Π_n comme étant des "vecteurs propres" d'un endomorphisme.

$\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous espace des polynômes de degré au plus n. A et B étant les deux polynômes suivants :

$$A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0 \text{ et } B = \beta_1 X + \beta_0$$

On note pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$:

$$\mathcal{L}(P) = AP'' + BP'$$

(ces notations sont valables dans tout le problème)

1. Montrer que $\mathcal{L}$ définit un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, et qu'il induit par restriction, pour tout entier n, un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Dans cette question, $\mathcal{L}$ sera considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (a) Ecrire la matrice de $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$, dans la base canonique $\{1, X, X^2\}$ de $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Vérifier que si
   $$\forall k \in \{0,1,2\},\ k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$$
   alors $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$ est diagonalisable.

3. On examine, toujours dans $\mathbb{R}_2[X]$, quelques cas particuliers, obtenus en spécifiant A et B.
   (a) (polynômes de type "**Hermite**"). Ici $A = \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose que $\beta_1 \neq 0$.
   Déterminer explicitement une base de $\mathbb{R}_2[X]$ qui diagonalise $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) (polynômes de type "**Jacobi**"). Ici $A = \alpha_2(X^2 - 1)$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$, on suppose que $\beta_1 \neq 0$ et que $2\alpha_2 + \beta_1 = 0$.
   Donner, dans ce cas, une condition nécessaire et suffisante pour que, $\mathcal{L}$ restreint à $\mathbb{R}_2[X]$, soit diagonalisable.

4. On revient ici au cas général, $A = \alpha_2 X^2 + \alpha_1 X + \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$, et on suppose que :
   $$(i) \quad \forall k \in \mathbb{N},\ k\alpha_2 + \beta_1 \neq 0$$

On suppose jusqu'à la fin du problème que cette condition (i) est satisfaite.

(a) Montrer que pour tout entier n, $\mathcal{L}$, considéré comme un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$, est diagonalisable.

(b) En déduire que pour tout entier n, il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ et au moins un $\Pi_n \in \mathbb{R}[X]$, de degré n tel que : $\mathcal{L}(\Pi_n) = \lambda_n \Pi_n$. Préciser λ_n et montrer que $Ker(\mathcal{L} - \lambda_n Id_{\mathbb{R}[X]})$ est de dimension 1.

(c) La famille $\Big\{\Pi_n\Big\}_{n\in\mathbb{N}}$ constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}[X]$?

A tout triplet (A, B, n) est donc associé un polynôme Π_n, défini à une constante multiplicative non nulle près. Cette notation est utilisée jusqu'à la fin du problème.

2 Orthogonalité des polynômes Π_n

On se propose, dans trois cas particuliers, de mettre en place un produit scalaire qui fera de la famille $\{\Pi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthogonale.

1. Si J est un intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$, et si ω est une fonction de classe C^1 de J dans $\mathbb{R}_+^*$, on note :

$$H_\omega = \{f \in \mathcal{F}(J, \mathbb{R}) \mid f \text{ continue sur } J \text{ et } \omega f^2 \text{ intégrable sur } J\}$$

(on notera parfois $J =]a, b[$, cet intervalle n'est pas nécessairement borné, on peut avoir $a = -\infty$ ou bien $b = +\infty$).

(a) Montrer que H_ω est un espace vectoriel.

(b) Montrer que l'on définit un produit scalaire sur H_ω en posant :

$$\forall (g, h) \in H_\omega^2,\ (f \mid g) = \int_J \omega(t) f(t) g(t) dt$$

Dans la question suivante, on suppose que les polynômes, en tant que fonctions de $J =]a, b[$ dans $\mathbb{R}$, sont des éléments de H_ω, A et B sont les polynômes définis dans la première partie.

2. Si l'on suppose que :

$$(ii) \quad \forall x \in J,\ (\frac{d}{dx}\omega(x))A(x) + \omega(x)(\frac{d}{dx}A(x)) = \omega(x)B(x)$$

$$(iii) \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} \omega(x)x^n A(x) = \lim_{\substack{x\to b \\ x<b}} \omega(x)x^n A(x) = 0$$

Montrer que :

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2\ (n \neq m) \Longrightarrow \Big(\int_a^b \omega(t)\Pi_n(t)\Pi_m(t)dt = 0\Big)$$

3. On examine ici trois cas particuliers.

(a) ("**Hermite**"). On a donc $A = \alpha_0$ et $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose de plus que $\alpha_0\beta_1 < 0$. On pose :

$$J = \mathbb{R} \text{ et } \omega(x) = e^{\frac{(B(x))^2}{2\alpha_0\beta_1}}.$$

Montrer que les polynômes sont des éléments de H_ω et que les conditions (ii) et (iii) sont vérifiées.

(b) ("**Jacobi**"). Ici l'expression de B est présentée sous une forme "plus agréable" :

$$B = (p + q + 2)X + (p - q)$$

avec $p + 1 > 0$ et $q + 1 > 0$, celle de A est simplifiée : $A = X^2 - 1$.

Déterminer ω, une application de classe C^1 de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que le couple $(]-1, 1[, \omega)$ vérifie les conditions (ii) et (iii).

Pour ce couple, les polynômes sont-ils dans H_ω ?

(c) ("**Laguerre**"). On suppose ici que : $A = \alpha_1(X - \rho)$, où ρ est un réel et que $B = \beta_1 X + \beta_0$. On suppose de plus que $\alpha_1\beta_1 < 0$.

Déterminer une application ω de classe C^1 de $]\rho, +\infty[$ dans $\mathbb{R}_+^*$ telle que (ii) soit réalisée. Trouver une condition portant sur le signe de $\frac{B(\rho)}{\alpha_1}$ pour que le couple $(]\rho, +\infty[, \omega)$ vérifie (iii).

Montrer que dans ce cas les polynômes sont des éléments de H_ω.

3 Rodrigues et les fonctions génératrices

On se place ici dans le cas général, c'est-à-dire que A et B vérifient (i) (cf **1**.4), on suppose que ω est une application de J dans $\mathbb{R}_+^*$ de classe C^1 et que le couple (J, ω) vérifie (ii) et (iii) (cf **2**.2). On suppose aussi que les polynômes sont éléments de H_ω.

1. (a) Montrer que pour tout couple $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $p \leq n$ la fonction ωA^n est p fois dérivable sur J et qu'il existe un polynôme $Q_{(n,p)}$, dont on précisera le degré, tel que :

$$\forall x \in J,\ \frac{d^p}{dx^p}(\omega(x)\,(A(x))^n) = \omega(x)\,(A(x))^{n-p}\,Q_{(n,p)}(x)$$

(b) Montrer que si $m \neq n$, alors :

$$(Q_{(n,n)} \mid \Pi_m) = 0$$

(c) En déduire qu'il existe un lien entre le polynôme Π_n de la fin de la première partie et $Q_{(n,n)}$.

Ce lien constitue la formule de Rodrigues.

2. ("**Legendre**", un cas de **Hermite** simplifié). Ici $A = -1$ et $B = 2X$. On prendra pour couple (J, ω) celui qui est donné en **2**.3.(a). On pose $H_n = Q_{(n,n)}$.

(a) Vérifier que :

$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - \frac{d}{dx}(H_n(x))$$

(b) Etablir l'égalité suivante :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ \frac{\partial^n}{\partial t^n}(e^{-(x-t)^2}) = e^{-(x-t)^2} H_n(x - t)$$

(c) En déduire la formule :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ e^{2xt - t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)t^n}{n!}$$

(d) Calculer H_5.

3. (“**Laguerre**” simplifié).

   On se place dans une situation du type **2**.3.(c), avec ici $A = X$ et $B = -X + 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note L_n le polynôme en x défini par :

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^n)$$

   (a) Dans ce cas, quel lien existe-t-il entre L_n et H_n ?
   (On peut poursuivre cette question **3**.3 même sans avoir répondu à **3**.3.(a).)

   (b) Etablir la formule :

$$\forall x \in J,\ \forall n \in \mathbb{N},\ L_{n+2}(x) + xL_{n+1}(x) = (2n+3)L_{n+1}(x) - (n+1)^2 L_n(x)$$

   Pour tout $x \in]0, 1[$, on considère la fonction F_x définie, par :

$$F_x(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{L_n(x)t^n}{n!}$$

   (c) Montrer que le rayon de convergence, que l'on notera R_x, de la série entière qui définit F_x est non nul.

   (d) Trouver une équation différentielle linéaire du premier ordre dont F_x est solution sur $]-R_x, R_x[$.

   (e) Déterminer $F_x(t)$, préciser la valeur de R_x.

4 Convergence quadratique

Dans cette partie on ne s'intéresse qu'au cas de **Laguerre** du **3**.3.

Ici $J =]0, +\infty[$ et $\omega(x) = e^{-x}$. On note désormais N_ω la norme associée au produit scalaire $(. \mid .)_\omega$.

On suppose que les polynômes Π_n sont choisis normés ($N_\omega(\Pi_n) = 1$) et que le coefficient de leur terme dominant est positif, ainsi ils sont parfaitement déterminés.

1. Calculer $N_\omega(L_n)$, et exprimer Π_n à l'aide de L_n.

2. Soit $m \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_m(x) = e^{-mx}$.

   (a) Calculer $(\varphi_m \mid \Pi_n)_\omega$ ainsi que $N_\omega(\varphi_m)$.

   (b) En déduire que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\omega\Big(\varphi_m - \sum_{k=0}^{n}(\varphi_m \mid \Pi_k)\Pi_k\Big) = 0$$

   (c) Pour $N \in \mathbb{N}$ et $\{\mu_m\}_{m\in[0,N]}$, une famille de réels, on considère :

$$\psi = \sum_{m=0}^{N} \mu_m \varphi_m.$$

   Vérifier que :

$$\lim_{n\to+\infty} N_\omega\Big(\psi - \sum_{k=0}^{n}(\psi \mid \Pi_k)\Pi_k\Big) = 0$$

3. Soit g une fonction définie et continue sur $[0,+\infty[$, telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

   (a) Montrer que la fonction h définie sur $[0,1]$ par :

   $$h(0) = 0 \text{ et pour } u \neq 0,\ h(u) = g(-\ln(u))$$

   est continue sur $[0,1]$.

   (b) En déduire que $\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists P \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

   $$\int_0^{+\infty} e^{-t}(g(t) - P(e^{-t}))^2 dt \leq \epsilon^2$$

4. Montrer que

   $$\forall f \in H_\omega,\ \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists\, g_f \text{ continue sur } [0,+\infty[\text{ vérifiant } \lim_{x\to+\infty} g_f(x) = 0$$
   $$\text{telle que : } N_\omega(f - g_f) \leq \epsilon$$

5. Montrer que $\forall f \in H_\omega$, la série

   $$\sum (f \mid \Pi_n)\Pi_n$$

   converge vers f pour la norme N_ω.