

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

On se propose d'étudier certaines équations différentielles, d'abord dans le cadre des séries entières, ensuite dans celui des fonctions indéfiniment dérivables.

Notations des parties I, II et III

On désigne par E l'espace vectoriel sur \mathbf{C} formé des suites de nombres complexes $u = (u_k)_{k=1,2,\dots}$, et par e_n la suite u où $u_k = 1$ si $k = n$ et 0 si $k \neq n$. Pour tout u de E on note $r(u)$ le rayon de convergence, éventuellement nul ou infini, de la série entière $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k x^k$; pour tout nombre réel $R > 0$ on note E_R l'ensemble des u de E tels que $r(u) \geq R$; enfin on note E_+ l'ensemble des $u \in E$ tels que $r(u) > 0$.

Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

a) Un élément u de E appartient à E_+ si et seulement s'il existe un nombre réel $M > 0$ tel que l'on ait $|u_k| \leq M^k$ pour tout k ; dans ce cas on a $r(u) \geq \frac{1}{M}$.

b) Si, pour un réel $M > 0$, on a $|u_k| \geq M^k$ pour tout k , on a $r(u) \leq \frac{1}{M}$.

2. Déterminer un nombre réel $\gamma > 0$ tel que l'on ait, pour tout $k \geq 2$:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{1}{i^2(k-i)^2} \leq \frac{\gamma}{k^2}$$

Deuxième partie

On fixe un nombre complexe a et on désigne par A_a l'endomorphisme de E défini par $(A_a u)_k = (k+a)u_k$ pour tout k .

3. Déterminer le noyau et l'image de A_a .

4. Vérifier que, si a n'est pas un entier strictement négatif, pour tout $R > 0$, la restriction de A_a à E_R est un isomorphisme de ce sous-espace sur lui-même.

Troisième partie

On définit le produit $u * v$ de deux éléments u et v de E par $(u * v)_1 = 0$ et

$$(u * v)_k = \sum_{i=1}^{k-1} u_i v_{k-i} \text{ pour } k \geq 2$$

On fixe deux nombres complexes a et c , a n'étant pas un entier strictement négatif ; on note T l'application de E dans lui-même définie par $Tu = A_a u + c u * u$.

5.a) Supposant que $Tu = v$ où u et v sont des éléments de E , écrire u_1 en fonction de v_1 , puis u_k en fonction de v_k, u_1, \dots, u_{k-1} pour $k \geq 2$.

b) Déterminer le noyau et l'image de T . L'application T est-elle injective ? surjective ?

6. On se propose de démontrer que la restriction de T à E_+ est une bijection de ce sous-espace sur lui-même.

a) Vérifier que $T(E_+)$ est inclus dans E_+ .

b) Soit $u \in E$ tel que $v = Tu \in E_+$. Démontrer l'existence de nombres réels δ, M, M_0, M_1 strictement positifs satisfaisant les conditions suivantes :

- (1) $\forall k \in \mathbf{N}^*, |k + a| \geq \delta$
- (2) $2|c|\gamma M_0 \leq \delta$, où γ est la constante introduite à la question **2**.
- (3) $\forall k \in \mathbf{N}^*, |v_k| \leq M^k$
- (4) $M \leq \delta M_0 M_1$
- (5) $\forall k \in \mathbf{N}^*, 2k^2 M^k \leq \delta M_0 M_1^k$.

c) Comparer $|u_k|$ et $\frac{M_0 M_1^k}{k^2}$.

d) Conclure.

7. Exemple. On prend $a = 0, c = -1, v = \lambda e_1$ où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$, et on suppose encore $Tu = v$.

a) Montrer que u_k est de la forme $u_k = \alpha_k \lambda^k$ avec $\alpha_k \in \mathbf{R}_+^*$ et

$$2^{1-k} \leq \alpha_k \leq 1 \text{ pour tout } k$$

b) En déduire un encadrement de $r(u)$.

Quatrième partie

Pour tout intervalle ouvert I de \mathbf{R} , on note $C^\infty(I)$ l'espace des fonctions complexes indéfiniment dérivables sur I . On désigne par a un nombre réel non nul et par D l'endomorphisme de $C^\infty(I)$ défini par

$$(Df)(t) = t f'(t) + a f(t).$$

8. Déterminer les solutions maximales de l'équation différentielle $Df = 0$ sur les intervalles $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$, et préciser leurs intervalles de définition.

9. Dire pour quelles valeurs de a il existe une fonction $f \in C^\infty(\mathbf{R})$, vérifiant $Df = 0$, nulle en 0 mais non identiquement nulle.

Dans la suite, on prend pour I un intervalle de la forme $]0, \theta[$ avec $\theta \in]0, +\infty[$. On désigne par t_0 un point de I , par g une fonction de $C^\infty(I)$, et enfin par α un nombre complexe.

10. Déterminer la solution maximale de l'équation différentielle $Df = g$ sur I telle que $f(t_0) = \alpha$ [on pourra introduire la fonction

$$t \mapsto \int_{t_0}^t s^{a-1} g(s) ds]$$

11. On suppose dans cette question que a n'est pas un entier strictement négatif et que g est la restriction à I de la somme d'une série entière $\sum_{k=1}^{\infty} v_k t^k$ ayant un rayon de convergence $\geq \theta$. Déterminer α de façon que f soit aussi la restriction à I de la somme d'une série entière ayant un rayon de convergence $\geq \theta$.

12. On se propose d'étudier le comportement de $f(t)$ lorsque t tend vers 0, sous l'hypothèse que $g(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0.

a) Supposant $a < 0$, déterminer la limite de $f(t)$ lorsque t tend vers 0.

b) On suppose maintenant $a > 0$ et que la fonction g , prolongée par 0 au point 0, admet une dérivée à droite en ce point. Trouver un nombre α tel que $f(t)$ tende vers 0 lorsque t tend vers 0.

* *
*