

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

\*\*\*

Ce problème a pour objet l'étude de certains cônes dans des espaces euclidiens.

On désigne par  $E$  l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  ( $n \geq 1$ ), par  $(. | .)$  son produit scalaire usuel, et par  $\|.\|$  la norme associée. Pour toute partie  $X$  de  $E$ , on note  $X^\perp$  (resp.  $X^+$ ) l'ensemble des éléments  $x$  de  $E$  satisfaisant  $(x | y) = 0$  (resp.  $(x | y) \geq 0$ ) pour tout  $y$  de  $X$ .

Une partie  $C$  de  $E$  sera appelée *cônes à faces* s'il existe une famille finie d'éléments  $c_1, \dots, c_r$  ( $r > 0$ ) de  $E$  telle que  $C$  soit l'ensemble des combinaisons linéaires  $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$  avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_r \geq 0$ . On supposera toujours les  $c_i$  non nuls, et on dira qu'ils *engendrent*  $C$ . Enfin, on appelle *face* de  $C$  toute partie de  $C$  de la forme  $C \cap \{w\}^\perp$  avec  $w \in C^+$ .

La première partie est indépendante des suivantes.

Première partie

1. Vérifier que tout sous-espace vectoriel non nul de  $E$  est un cône à faces.
2. Supposant  $n = r = 2$ , décrire (sans démonstration mais avec des figures) les ensembles  $C, C^+$  et donner sous chaque figure la liste des faces de  $C$  suivant les diverses positions relatives de  $c_1$  et  $c_2$ .
3. Supposant que  $n = r = 3$  et que  $(c_1, c_2, c_3)$  est une base orthogonale de  $E$ , décrire sans démonstration  $C, C^+$  et les faces de  $C$ .

Deuxième partie

On se propose, dans cette partie, de démontrer que tout cône à faces est fermé dans  $E$ .

4.a) Soit  $K$  une partie compacte de  $E$  ne contenant pas 0. Montrer que l'ensemble des éléments de la forme  $\lambda x$ , où  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  et  $x \in K$ , est fermé dans  $E$ .

b) Ce resultat subsiste-t-il si l'on suppose  $K$  seulement fermé, ou si  $K$ , compact, contient 0 ?

5. On considère maintenant un cône à faces  $C$  engendré par des éléments  $c_1, \dots, c_r$ .

a) Montrer que  $C$  est fermé lorsqu'il ne contient aucune droite vectorielle. [On pourra introduire l'ensemble  $K$  des éléments  $\sum_{i=1}^r \lambda_i c_i$  avec  $\lambda_i \in \mathbf{R}_+$  et  $\sum_{i=1}^r \lambda_i = 1$ .]

**b)** Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  (éventuellement réduit à  $0$ ) contenu dans  $C$  et distinct de  $C$ . On note  $P$  le projecteur orthogonal de  $E$  sur  $V^\perp$ . Vérifier que  $P(C)$  est un cône à faces contenu dans  $C$ .

**c)** Supposant que  $P(C)$  contient une droite vectorielle, construire un sous-espace vectoriel de  $E$  contenu dans  $C$  et contenant strictement  $V$ .

**d)** Montrer que  $C$  est fermé dans  $E$ .

### Troisième partie

**6.** On se propose ici de démontrer que tout cône à faces  $C$  vérifie  $(C^+)^+ = C$ .

**a)** Soit  $a$  un élément de  $E$ . Montrer que la fonction réelle définie sur  $C$  par  $c \mapsto \|c - a\|$  atteint sa borne inférieure en un point unique de  $C$ . On le notera  $p(a)$ .

**b)** Déterminer le signe de  $(p(a) - a | c)$  lorsque  $c \in C$ , ainsi que la valeur de  $(p(a) - a | p(a))$ .

**c)** Conclure.

### Quatrième partie

On souhaite maintenant démontrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés (on appelle *demi-espace fermé* tout sous-ensemble de  $E$  de la forme  $\{a\}^+$  avec  $a \in E, a \neq 0$ ).

**7.** Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un cône à faces  $C$  :

- ( $\alpha$ ) le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $C$  est égal à  $E$  ;
- ( $\beta$ ) l'intérieur de  $C$  est non vide.

**8.** On suppose dans cette question les conditions de la question **7.** satisfaites pour un cône à faces  $C$ .

**a)** Démontrer l'équivalence des conditions suivantes relatives à un élément  $x$  de  $C$  :

- ( $\alpha'$ )  $x$  est un point frontière de  $C$  ;
- ( $\beta'$ )  $x$  appartient à une face de  $C$  distincte de  $C$ .

**b)** Que subsisterait-il de ce résultat si l'on ne supposait pas satisfaites les conditions de la question **7.** ?

**c)** Soit  $x$  un point de  $E$  n'appartenant pas à  $C$ . Construire une face  $F$  de  $C$ , distincte de  $C$  et ayant la propriété suivante : pour tout  $w \in C^+$  tel que  $F = C \cap \{w\}^\perp$ , on a  $(x | w) < 0$ .

[On pourra considérer le segment de droite joignant  $x$  à un point  $x_0$  de l'intérieur de  $C$ ].

**9.a)** Montrer que l'ensemble des faces d'un cône à face est fini.

**b)** Montrer que tout cône à faces est l'intersection d'une famille finie de demi-espaces fermés.

**10.** Dédurre de ce qui précède que, si  $C$  est un cône à faces, il en est de même de  $C^+$ .

\* \*  
\*