

**PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

On se propose d'étudier une famille de polynômes (polynômes de Krawtchouk) et une famille de matrices (matrices d'adjacence du schéma d'association de Hamming) dont les propriétés sont liées, et applicables à la théorie des codes détecteurs et correcteurs d'erreurs dans la transmission de l'information. (Ces applications ne sont pas abordées dans le problème.)

*Les deux premières parties sont indépendantes.*

\*\*\*

Dans tout le problème,  $N$  désigne un entier naturel non nul.

On prend par convention  $0! = 1$ . Si  $n$  et  $k$  sont des entiers naturels, on pose

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**Première partie**

1. Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , on définit le polynôme  $\varphi_k$  de la variable  $X$  par

$$\varphi_k(X) = \begin{cases} \frac{1}{k!} \prod_{0 \leq i \leq k-1} (X - i) & \text{si } k > 0 \\ 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k < 0. \end{cases}$$

Évaluer  $\varphi_k(j)$  pour chaque entier naturel  $j$ .

2. Pour tout entier  $n$  tel que  $0 \leq n \leq N$ , on définit le polynôme  $P_n$  de la variable  $X$  par

$$P_n(X) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \varphi_k(X) \varphi_{n-k}(N - X).$$

a) Calculer  $P_0, P_1$  et  $P_2$ .

- b) Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme  $P_n$ .  
 c) Montrer que, pour chaque entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq N$ ,

$$P_n(j) = \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{j}{k} \binom{N-j}{n-k}.$$

3. Pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq N$ , on considère la fonction  $f_j$  de la variable réelle  $u$ , définie par

$$f_j(u) = \sum_{n=0}^N P_n(j) u^n.$$

Montrer que  $f_j(u) = (1-u)^j (1+u)^{N-j}$ .

4. On considère la fonction  $F$  de deux variables réelles  $u$  et  $v$ , définie par

$$F(u, v) = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} f_j(u) f_j(v).$$

- a) Montrer que  $F(u, v) = \alpha(1+uv)^\beta$ , où  $\alpha$  et  $\beta$  sont des constantes que l'on déterminera.  
 b) Soient  $a$  et  $b$  des entiers,  $0 \leq a \leq N$ ,  $0 \leq b \leq N$ . Montrer que si  $a \neq b$  :

$$\frac{\partial^{a+b} F}{\partial u^a \partial v^b}(0, 0) = 0.$$

Évaluer  $\frac{\partial^{2a} F}{\partial u^a \partial v^a}(0, 0)$  en fonction de  $a$  et de  $N$ .

5. On note  $\mathbf{R}_N[X]$  l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $N$ . Pour  $P, Q \in \mathbf{R}_N[X]$ , on pose

$$\langle P|Q \rangle = \sum_{j=0}^N \binom{N}{j} P(j) Q(j).$$

- a) Montrer que  $\langle | \rangle$  est un produit scalaire sur  $\mathbf{R}_N[X]$ .  
 b) Montrer que  $(P_n)_{0 \leq n \leq N}$  est une base orthogonale de  $\mathbf{R}_N[X]$  muni de ce produit scalaire.  
 6. Montrer que, pour tout entier  $m$  tel que  $1 \leq m \leq N-1$ ,

$$(m+1)P_{m+1}(X) - (N-2X)P_m(X) + (N-m+1)P_{m-1}(X) = 0.$$

[On calculera de deux manières différentes le coefficient de  $u^m$  dans  $(1-u^2)\frac{df_j(u)}{du}$ .]

## Deuxième partie

On pose  $E = \{1, 2, \dots, N\}$  et l'on désigne par  $\mathcal{P}(E)$  l'ensemble des parties de  $E$ . Pour chaque partie  $I$  de  $E$ , on note  $\text{Card } I$  le cardinal de  $I$ . Si  $I$  et  $J$  sont des parties de  $E$ , on pose

$$d(I, J) = \text{Card}(I \Delta J),$$

où  $I \triangle J$  est l'ensemble des points de la réunion  $I \cup J$  qui n'appartiennent pas à l'intersection  $I \cap J$ .

**7.a)** À quelle condition a-t-on  $d(I, J) = 0$  ? À quelle condition a-t-on  $d(I, J) = 1$  ?

**b)** Montrer que  $d(I \triangle J, I) = \text{Card } J$ .

**8.** Soient  $I$  et  $J$  deux parties de  $E$ . On pose  $d(I, J) = k$ . Calculer le nombre  $\gamma_j^k$  de parties  $A$  de  $E$  telles que  $d(I, A) = 1$  et  $d(J, A) = j$ .

### Troisième partie

On utilise dans cette partie les notations et les résultats des deux premières parties.

On suppose  $\mathcal{P}(E)$  muni d'un ordre total  $\preceq$ . On a donc  $\mathcal{P}(E) = \{I_1, I_2, \dots, I_{2^N}\}$  où  $I_1 \preceq I_2 \preceq \dots \preceq I_{2^N}$ .

Pour tout entier naturel  $n$ , on définit une matrice carrée réelle à  $2^N$  lignes

$$A_n = ((A_n)_{pq})_{\substack{1 \leq p \leq 2^N \\ 1 \leq q \leq 2^N}} \quad \text{par}$$

$$(A_n)_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(I_p, I_q) = n \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On note  $\mathcal{J}$  la matrice identité à  $2^N$  lignes.

**9.a)** Que vaut  $A_n$  pour  $n > N$  ? Expliciter  $A_0$ .

**b)** Montrer que pour tout entier  $m$  tel que  $1 \leq m \leq N - 1$ ,

$$A_1 A_m = (N - m + 1) A_{m-1} + (m + 1) A_{m+1}.$$

**10.** On pose  $A = \frac{1}{2}(N\mathcal{J} - A_1)$ . Montrer par récurrence sur  $n$  que, pour tout entier  $n$  tel que  $0 \leq n \leq N$ ,

$$A_n = P_n(A),$$

où les polynômes  $P_n$  sont ceux définis et étudiés dans la première partie.

**11.** Soit  $i$  un entier tel que  $0 \leq i \leq N$ . Montrer que, si  $I \in \mathcal{P}(E)$  est tel que  $\text{Card } I = i$ , alors pour tout entier  $j$  tel que  $0 \leq j \leq N$ ,

$$P_j(i) = \sum_{\substack{J \in \mathcal{P}(E) \\ \text{Card } J = j}} (-1)^{\text{Card}(I \cap J)}.$$

**12.a)** Soient  $I, J, K \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que

$$(-1)^{\text{Card}((I \triangle J) \cap K)} = (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J \cap K)}.$$

**b)** Soient  $I, J \in \mathcal{P}(E)$ . Montrer que

$$\sum_{K \in \mathcal{P}(E)} (-1)^{\text{Card}(I \cap K)} (-1)^{\text{Card}(J \cap K)} = \begin{cases} 2^N & \text{si } I = J \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

**13.** Pour tout entier  $k$  tel que  $0 \leq k \leq N$ , on pose

$$B_k = \frac{1}{2^N} \sum_{n=0}^N P_k(n) A_n.$$

a) Montrer que

$$\begin{cases} (B_k)^2 = B_k \\ B_k B_\ell = 0 \quad \text{si } \ell \neq k. \end{cases}$$

[On pourra utiliser les résultats des questions **11.** et **12.**].

b) Déterminer la trace et le rang de chaque matrice  $B_k$ .

**14.a)** Pour chaque entier  $n$  tel que  $0 \leq n \leq N$ , trouver les valeurs propres de la matrice  $A_n$ .

b) Déterminer la dimension des sous-espaces propres de la matrice  $A_1$ .

\* \*  
\*