

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

On se propose d'établir quelques propriétés des sous-groupes discrets des espaces euclidiens. Dans tout le problème, on désigne par  $n$  un entier strictement positif, par  $E$  l'espace  $\mathbf{R}^n$ , par  $(\cdot | \cdot)$  son produit scalaire usuel et par  $\| \cdot \|$  la norme correspondante. On rappelle les faits suivants :

a) un sous-ensemble  $L$  de  $E$  est dit *discret* si tout élément  $x$  de  $L$  est isolé, *i.e.* admet un voisinage  $V$  dans  $E$  tel que  $L \cap V = \{x\}$  ;

b) un groupe abélien  $G$  est isomorphe à un groupe  $\mathbf{Z}^m$  si et seulement s'il admet une  $\mathbf{Z}$ -base, c'est-à-dire une famille  $(e_1, \dots, e_m)$  telle que tout élément  $g$  de  $G$  s'écrive d'une façon unique sous la forme  $g = \sum_{i=1}^m k_i e_i$  avec  $k_i \in \mathbf{Z}$ .

## Première partie

1. Démontrer les assertions suivantes :

- a) Un sous-groupe  $L$  de  $E$  est discret si et seulement si l'élément 0 est isolé.
- b) Tout sous-groupe discret  $L$  de  $E$  est fermé dans  $E$ .
- c) Les sous-groupes discrets de  $\mathbf{R}$  sont exactement les sous-ensembles de la forme  $a\mathbf{Z}$  avec  $a \in [0, +\infty[$ .

2. On désigne par  $\alpha$  un nombre réel  $> 0$  et par  $L$  le sous-groupe de  $\mathbf{R}$ , ensemble des réels  $m + n\alpha$  où  $n, m \in \mathbf{Z}$ . Montrer que  $L$  est discret si et seulement si  $\alpha$  est rationnel.

3. Construire un sous-groupe discret  $L$  de  $\mathbf{R}^2$  tel que sa première projection sur  $\mathbf{R}$  ne soit pas discrète.

4. On se propose ici de démontrer que tout sous-groupe discret  $L$  de  $E$  est isomorphe à un sous-groupe d'un groupe  $\mathbf{Z}^m$ . On désigne par  $F$  le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par  $L$ , par  $m$  sa dimension, par  $(a_1, \dots, a_m)$  une base de  $F$  contenue dans  $L$ , et par  $L'$  le sous-groupe de  $L$  engendré par cette base. Enfin, on pose

$$P = L \cap \left\{ \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in [0, 1[ \right\} .$$

a) Vérifier que  $P$  est un ensemble fini.

b) Etant donné un élément  $x$  de  $L$ , construire un couple  $(y, z) \in L' \times P$  tel que l'on ait  $x = y + z$ , et démontrer son unicité.

c) Soit encore  $x$  un élément de  $L$  ; écrivant  $kx = y_k + z_k$  (pour  $k$  entier  $> 0$ ), montrer qu'il existe un entier  $d > 0$  tel que l'on ait  $dx \in L'$ .

d) Conclure.

5. Dans cette question,  $L$  est un sous-groupe de  $\mathbf{Z}^m$  ; ses éléments seront notés  $x = (x_1, \dots, x_m)$  ; on posera  $\pi(x) = x_m$ .

a) Montrer qu'il existe un entier  $k \geq 0$  et un élément  $x^\circ$  de  $L$  tel que l'on ait

$$\pi(L) = k\mathbf{Z} = \pi(x^\circ)\mathbf{Z} .$$

b) On suppose ici  $\pi(L)$  non réduit à  $\{0\}$  ; étant donné un élément  $x$  de  $L$ , construire un couple  $(p, \tilde{x}) \in \mathbf{Z} \times L$  tel que l'on ait  $\tilde{x}_m = 0$  et  $x = px^\circ + \tilde{x}$  ; démontrer son unicité.

c) En déduire que tout sous-groupe discret de  $E$  est isomorphe à un groupe  $\mathbf{Z}^r$ .

6. On suppose ici  $n = 2$  et on considère deux  $\mathbf{Z}$ -bases  $(u_1, u_2), (v_1, v_2)$  d'un même sous-groupe discret  $L$  de  $E$ . Comparer les aires des parallélogrammes construits respectivement sur  $(u_1, u_2)$  et  $(v_1, v_2)$ .

## Deuxième partie

7. Dans cette question, on désigne par  $B$  la base canonique de  $E$  et par  $GL(E)$  le groupe des automorphismes linéaires de  $E$ . Pour toute partie  $X$  de  $E$ , on note  $L(X)$  le sous-groupe de  $E$  engendré par  $X$ .

Soit  $G$  un sous-groupe fini de  $GL(E)$  tel que les matrices des éléments de  $G$  dans la base  $B$  soient à coefficients rationnels. On note  $GB$  l'ensemble des vecteurs  $g(x)$  où  $g \in G$  et  $x \in B$ .

a) Montrer qu'il existe un entier  $d > 0$  tel que l'on ait  $dL(GB) \subset L(B)$ .

b) Démontrer l'existence d'une base de  $E$  dans laquelle les matrices des éléments de  $G$  sont à coefficients entiers.

8. Soit  $A$  une matrice à  $n$  lignes et  $n$  colonnes, à coefficients rationnels, d'ordre fini  $r$  (c'est-à-dire que  $A^r = I$  et que  $r$  est le plus petit entier  $> 0$  ayant cette propriété).

a) Montrer que le polynôme caractéristique de  $A$  est à coefficients entiers.

b) On suppose ici  $n = 2$ . Montrer que  $r$  ne peut prendre que les valeurs 1, 2, 3, 4, 6 et donner, pour chacune de ces valeurs, un exemple de matrice d'ordre  $r$  à coefficients entiers.

## Troisième partie

On désigne par  $O(E)$  le groupe des automorphismes linéaires orthogonaux de  $E$  (ensemble des  $u$  de  $GL(E)$  tels que  $\|u(x)\| = \|x\|$  pour tout  $x$  de  $E$ ), et par  $AO(E)$  l'ensemble des transformations de  $E$  de la forme

$$x \mapsto g(x) = u(x) + a \quad \text{où } u \in O(E) \quad \text{et } a \in E ;$$

on écrit alors  $g = (u, a)$ . On note  $e$  l'élément neutre de  $O(E)$ .

**9.** Montrer que  $O(E)$  est compact.

**10.a)** Vérifier que  $AO(E)$  est un groupe, écrire sa loi de groupe, préciser son élément neutre, puis l'inverse d'un élément  $(u, a)$ .

**b)** Calculer  $(u, a)(e, b)(u, a)^{-1}$ .

**11.** On note  $\rho$  le morphisme  $AO(E) \rightarrow O(E)$  défini par  $\rho(u, a) = u$ . On fixe un sous-groupe discret  $L$  de  $E$  qui engendre linéairement  $E$  et on note  $G$  le sous-groupe de  $AO(E)$  formé des éléments  $g$  tels que  $g(L) = L$ .

**a)** Vérifier que, si un élément  $(u, a)$  de  $AO(E)$  appartient à  $G$ , il en est de même de  $(u, 0)$  et  $(e, a)$ .

**b)** Montrer que  $\rho(G)$  est fini.

**c)** Déterminer  $G$  dans le cas où  $n = 2$  et où  $L$  est l'ensemble des couples  $(x_1, x_2)$  de  $E$  tels que  $x_1 \in 2\mathbf{Z}$ ,  $x_2 \in \mathbf{Z}$ .

\* \*  
\*