

## DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

Dans les trois premières parties, on désigne par

- $n$  et  $m$  des entiers  $> 0$  tels que  $n \leq m$  ;
- $E$  l'espace euclidien  $\mathbf{R}^n$  avec son produit scalaire usuel  $(\cdot | \cdot)$  et la norme associée  $\| \cdot \|$  ;
- $e_j, j = 1, \dots, m$ , des éléments non nuls de  $E$  satisfaisant une condition de la forme

$$\forall x \in E \quad \alpha \|x\|^2 \leq \sum_j (x | e_j)^2 \quad (1)$$

où  $\alpha$  est un réel  $> 0$  ;

- $T$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$T(x) = \sum_j (x | e_j) e_j .$$

Si  $S$  est un endomorphisme de  $E$ , sa norme  $\|S\|$  est définie par

$$\|S\| = \sup\{\|S(x)\| : \|x\| = 1\} .$$

**Première partie**

1. Donner un exemple simple de famille  $(e_j)$  satisfaisant une condition de la forme (1).
2. Déterminer le sous-espace vectoriel de  $E$  engendré par les  $e_j$ .
3. On prend  $n = 2, m = 3, e_1 = (0, 1), e_2 = (-\sqrt{3}/2, -1/2), e_3 = (\sqrt{3}/2, -1/2)$ . Déterminer  $\sum_j (x | e_j)^2$  et  $T$ .
4. Vérifier que  $T$  est autoadjoint, inversible et satisfait  $(T(x) | x) \geq \alpha \|x\|^2$  pour tout  $x \in E$ .
5. Comparer  $\|T\|$  et  $\sup\{(T(x) | x) : \|x\| = 1\}$ .

6. Trouver un réel  $\beta$  tel que  $(T^{-1}(x) | x) \leq \beta \|x\|^2$  pour tout  $x \in E$ . Que peut-on dire de  $\|T^{-1}\|$  ?

7. On suppose que  $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x | e_j)^2$  pour tout  $x \in E$ . Déterminer  $T$ .

### Deuxième partie

On note  $F$  l'espace euclidien  $\mathbf{R}^m$ ,  $(f_1, \dots, f_m)$  sa base naturelle,  $(\cdot | \cdot)_F$  son produit scalaire naturel. On définit une application linéaire  $\Phi : E \rightarrow F$  par

$$\Phi(x) = \sum_j (x | e_j) f_j .$$

On pourra admettre qu'il existe une unique application linéaire  $\Psi : F \rightarrow E$  satisfaisant

$$(\Psi(h) | x) = (h | \Phi(x))_F \quad \text{pour tous } x \in E, h \in F .$$

8. Vérifier que l'on a  $\Psi(h) = \sum_j h_j e_j$  et  $\Psi \circ \Phi = T$ .

On pose  $\tilde{e}_j = T^{-1}(e_j)$  et on définit une application linéaire  $\tilde{\Phi} : E \rightarrow F$  par

$$\tilde{\Phi}(x) = \sum_j (x | \tilde{e}_j) f_j .$$

9. Vérifier que l'on a  $F = \text{Im } \tilde{\Phi} \oplus (\text{Im } \tilde{\Phi})^\perp$ .

10. Étant donné un élément  $x$  de  $E$ , déterminer le minimum des nombres  $\sum_j h_j^2$  pour les familles  $(h_j)$  vérifiant  $x = \sum_j h_j e_j$ , et préciser pour quelles familles  $(h_j)$  ce minimum est atteint.

11. Expliquer ce qui se passe dans chacun des cas suivants :

- a) les  $e_j$  forment une base de  $E$  ;
- b) les  $e_j$  forment une base orthonormale de  $E$  ;
- c) on a  $\alpha \|x\|^2 = \sum_j (x | e_j)^2$  pour tout  $x \in E$ .

### Troisième partie

On se propose, dans cette partie, de résoudre l'équation  $T(x) = y$  par une méthode d'itérations successives. On pose

$$a = \inf\{(T(x) | x) : \|x\| = 1\} \quad , \quad b = \|T\| ;$$

on a donc  $0 < a \leq b$ . Pour tout réel  $s > 0$  on pose  $V_s = id_E - sT$ .

12. Montrer que l'on a

$$\|V_s\| = \max(|1 - a s|, |1 - b s|) ,$$

13. Déterminer le minimum  $C$  de la fonction  $s \mapsto \|V_s\|$ , préciser pour quelle valeur  $s_0$  de  $s$  il est atteint, et montrer que  $C \in [0, 1[$ . À quelle condition  $C$  est-il égal à 0 ?

[Il est conseillé de dessiner les courbes représentatives des fonctions  $s \mapsto |1 - a s|$  et  $s \mapsto |1 - b s|$ ].

On fixe un élément  $y$  de  $E$  et on définit une application  $U$  de  $E$  dans lui-même par

$$U(x) = x + s_0(y - T(x)) .$$

14. Étant donné  $x$  et  $x'$  dans  $E$ , comparer  $\|U(x) - U(x')\|$  et  $C\|x - x'\|$ .

15. On désigne par  $x_0$  un élément de  $E$  et on pose, pour tout entier  $n > 0$ ,  $x_n = U^n(x_0)$ . Étudier le comportement de la suite  $(x_n)$ . Conclure.

### Quatrième partie

Dans cette partie, on désigne par

- $E$  un espace préhilbertien réel ;
- $T$  un endomorphisme continu de  $E$  (on ne le suppose pas autoadjoint) ;
- $x_0$  et  $y_0$  des éléments de  $E$ .

Pour tout réel  $s > 0$  on définit une application  $U_s$  de  $E$  dans lui-même par

$$U_s(x) = x + s(y_0 - T(x)) .$$

16.a) Trouver une condition portant sur  $T$  suffisante pour que l'on ait une majoration de la forme

$$\|id_E - sT\|^2 \leq 1 - 2a s + b^2 s^2$$

avec  $a > 0$ ,  $b$  réel.

b) Trouver alors une condition portant sur  $E$ , impliquant que la suite  $x_n = U_s^n(x_0)$  soit convergente pour un  $s$  convenable ; préciser dans ce cas la nature (injectif ?, surjectif ?) de  $T$ .

\* \*  
\*