ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 2003 FILIÈRE **PC**

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

$\star\star\star$

Pfaffien d'une matrice antisymétrique

Le but du problème est d'étudier une application définie sur les matrices antisymétriques réelles d'ordre pair, dont le carré est l'application déterminant.

Toutes les matrices considérées sont à coefficients *réels*. Une matrice d'ordre p, $p \in \mathbf{N}^*$, est une matrice carrée à p lignes et p colonnes. On désigne par id_E l'application identité d'un espace vectoriel E, par I_p la matrice identité d'ordre p et par 0_p la matrice nulle d'ordre p. On note $\mathcal{A}_p$ l'espace vectoriel des matrices antisymétriques d'ordre p.

Première partie

1. Montrer que si A est une matrice antisymétrique d'ordre impair, $\operatorname{Det} A = 0$.

2. Soit D une matrice diagonale d'ordre m, $m \in \mathbf{N}^*$. Calculer en fonction des coefficients diagonaux de D le déterminant de la matrice d'ordre $2m$, $\begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$.

Soit $(E, (\ |\ ))$ un espace vectoriel euclidien. Dans tout le problème f est un endomorphisme de E tel que

$$f^* = -f\ .$$

où f^* désigne l'adjoint de f.

3. On suppose que $f^2 = 0$. Montrer que $f = 0$.

4. On suppose que $f^2 + \mathrm{id}_E = 0$.

a) Montrer que f est un automorphisme orthogonal de E.

b) Montrer que la dimension de E est paire.

c) Soit $v \in E$. À quelle condition les vecteurs v et $f(v)$ sont-ils linéairement indépendants ?

d) Soit F l'orthogonal du sous-espace vectoriel de E engendré par v et $f(v)$. Montrer que $f(F) \subset F$.

e) Soit $n = 2m$, $m \geqslant 1$, la dimension de E. Montrer qu'il existe une famille $(v_1, \ldots, v_m)$ de vecteurs de E telle que $(v_1, \ldots, v_m, f(v_1, \ldots, f(v_m))$ soit une base orthonormale de E. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

5.a) Montrer que f^2 est diagonalisable dans $\mathbf{R}$. On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres distinctes de f^2 et E_i l'espace propre correspondant à la valeur propre λ_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. Montrer qu'on a une décomposition en somme directe orthogonale,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_i \ .$$

b) Montrer que, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, $\lambda_i \leqslant 0$.

c) Montrer que, pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant k$, $f(E_i) \subset E_i$.

6.a) En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_{2m}$, il existe une matrice orthogonale Q d'ordre $2m$ et une matrice diagonale D d'ordre m telles que

$$A = {}^tQ \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix} Q \ .$$

b) En déduire que pour toute matrice $A \in \mathcal{A}_{2m}$, il existe une matrice M d'ordre $2m$ telle que $A = {}^tM \mathcal{J}_{2m} M$, où $\mathcal{J}_{2m} = \begin{pmatrix} 0_m & -I_m \\ I_m & 0_m \end{pmatrix}$.

Deuxième partie

Soit E un espace vectoriel réel et q un entier $\geqslant 2$. On appelle *forme q-linéaire alternée sur E* une application $\omega : E^q \to \mathbf{R}$ satisfaisant les conditions suivantes :

(A) si $x_1, \ldots, x_q$ sont des vecteurs de E et s'il existe un entier i, $1 \leqslant i \leqslant q-1$ tel que $x_i = x_{i+1}$, alors

$$\omega(x_1, \ldots, x_q) = 0 \ ;$$

en d'autres termes, l'application s'annule si deux arguments consécutifs sont égaux ;

(B) pour tout entier i, $1 \leqslant i \leqslant q$, si $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_q$ sont des vecteurs quelconques de E, l'application de E dans $\mathbf{R}$ définie par $x \mapsto \omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_q)$ est linéaire ; en d'autres termes, l'application ω est linéaire par rapport à chaque variable.

On note $\mathrm{Alt}_q(E)$ l'ensemble des formes q-linéaires alternées sur E.

7.a) Soit $\omega \in \mathrm{Alt}_q(E)$. Montrer que, pour tout entier i tel que $1 \leqslant i \leqslant q-1$, on a l'identité

$$\omega(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_i, x_{i+2}, \ldots, x_q) = -\omega(x_1, \ldots, x_q) \ ,$$

pour tous $x_1, \ldots, x_q$ dans E ; en d'autres termes ω change de signe si l'on permute deux arguments consécutifs.

b) Soit $\omega \in \mathrm{Alt}_q(E)$. Montrer que s'il existe des entiers i et j, $i \neq j$, $1 \leqslant i \leqslant q$, $1 \leqslant j \leqslant q$, tels que $x_i = x_j$, alors

$$\omega(x_1, \ldots, x_q) = 0 \ .$$

c) Montrer que, pour tout entier $q \geqslant 2$, $\mathrm{Alt}_q(E)$ est un espace vectoriel réel.

d) On admet que si E est de dimension n, la dimension de $\mathrm{Alt}_n(E)$ est égale à 1. Donner une base de cet espace vectoriel.

Soit $\omega \in \mathrm{Alt}_2(E)$. On définit une suite $\omega^{(p)}$, p entier $\geqslant 1$, par la récurrence suivante : $\omega^{(1)} = \omega$, et si $p \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\omega^{(p)}(x_1, \ldots, x_{2p}) &= \omega(x_1, x_2)\omega^{(p-1)}(x_3, \ldots, x_{2p}) \\ &\quad + \sum_{i=3}^{2p-1} (-1)^i \omega(x_1, x_i)\omega^{(p-1)}(x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{2p}) \\ &\quad + (-1)^{2p}\omega(x_1, x_{2p})\omega^{(p-1)}(x_2, \ldots, x_{2p-1}) \ ,\end{aligned}$$

pour tous $x_1, \ldots, x_{2p}$ dans E. Chaque $\omega^{(p)}$ est donc une application de E^{2p} dans $\mathbf{R}$. On écrira en abrégé

$$\omega^{(p)}(x_1, \ldots, x_{2p}) = \sum_{i=2}^{2p} (-1)^i \omega(x_1, x_2)\omega^{(p-1)}(x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{2p}) \ .$$

8.a) Expliciter $\omega^{(2)}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ et montrer que $\omega^{(2)} \in \mathrm{Alt}_4(E)$.

b) Montrer que, pour tout $p \geqslant 3$, $\omega^{(p)} \in \mathrm{Alt}_{2p}(E)$.

9. On suppose à nouveau que $(E, (\ |\ ))$ est un espace vectoriel euclidien et que f est un endomorphisme de E tel que $f^* = -f$. On pose, pour $x_1 \in E$, $x_2 \in E$,

$$\omega_f(x_1, x_2) = (x_1 | f(x_2)) \ .$$

Montrer que $\omega_f \in \mathrm{Alt}_2(E)$.

10. On suppose que $E = \mathbf{R}^{2m}$ muni de la structure euclidienne canonique. Soit A une matrice antisymétrique d'ordre $2m$ et soit f l'endomorphisme de $\mathbf{R}^{2m}$ associé à A. On reprend les notations des questions **8.** et **9.**

a) Montrer qu'il existe un nombre réel $P(A)$ tel que

$$(\omega_f)^{(m)}(x_1, \ldots, x_{2m}) = P(A)\,\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{2m}) \ ,$$

pour tous $x_1, \ldots, x_{2m} \in E$, où $\mathrm{Det}_{\mathcal{B}}$ désigne le déterminant dans la base canonique de $\mathbf{R}^{2m}$. Le nombre $P(A)$ est appelé *pfaffien* de A.

b) Calculer $P(A)$ lorsque $A \in \mathcal{A}_4$ en fonction des coefficients $a_{1,2}$, $a_{1,3}$, $a_{1,4}$, $a_{2,3}$, $a_{2,4}$, $a_{3,4}$ de A.

c) Lorsque $A = \begin{pmatrix} 0_m & -D \\ D & 0_m \end{pmatrix}$, où D est une matrice diagonale d'ordre m, calculer $P(A)$ en fonction des coefficients diagonaux de D, et déterminer un nombre réel α indépendant de D tel que

$$P(A) = \alpha\,\mathrm{Det}\,D \ .$$

Troisième partie

11. Soit $A \in \mathcal{A}_{2m}$ et soit M une matrice d'ordre $2m$.

a) Montrer que ${}^tMAM \in \mathcal{A}_{2m}$.

b) Montrer que $P({}^tMAM) = \mathrm{Det}(M)P(A)$.

12. En utilisant le résultat de la question **6.a)**, montrer que, pour $A \in \mathcal{A}_{2m}$,

$$(P(A))^2 = \mathrm{Det}(A) \ .$$

13. Soit $\Pi : \mathcal{A}_{2m} \to \mathbf{R}$ une application telle que $\Pi({}^tMAM) = \mathrm{Det}(M)\Pi(A)$, pour tout $A \in \mathcal{A}_{2m}$ et pour toute matrice M d'ordre $2m$. Montrer qu'il existe un nombre réel κ tel que, pour tout $A \in \mathcal{A}_{2m}$, $\Pi(A) = \kappa P(A)$.

14. Soit M une matrice d'ordre $2m$ telle que ${}^tM\mathcal{J}_{2m}M = \mathcal{J}_{2m}$, où $\mathcal{J}_{2m}$ est la matrice définie à la question **6.b)**. Montrer que $\mathrm{Det}(M) = 1$.

15.a) Soit B une matrice d'ordre m et soit $A = \begin{pmatrix} 0_m & -{}^tB \\ B & 0_m \end{pmatrix}$. Exprimer $P(A)$ en fonction de $\mathrm{Det}(B)$.

b) Soient m_1 et m_2 des entiers $\geqslant 1$, $A_1 \in \mathcal{A}_{2m_1}$, $A_2 \in \mathcal{A}_{2m_2}$, et soit

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0_{2m_1,2m_2} \\ 0_{2m_2,2m_1} & A_2 \end{pmatrix} \ ,$$

où $0_{m,m'}$ désigne la matrice nulle à m lignes et m' colonnes. Exprimer $P(A)$ en fonction de $P(A_1)$ et de $P(A_2)$.

* *
*