

DEUXIÈME COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

Courbure des surfaces dans l'espace \mathbf{R}^3

Ce problème propose une étude des surfaces de l'espace \mathbf{R}^3 et de leurs courbures totale et moyenne. Pour tout entier $n > 0$, l'espace \mathbf{R}^n sera muni de son produit scalaire et de sa norme usuels notés respectivement $(\cdot|\cdot)$ et $\|\cdot\|$. La première partie est consacrée à des préliminaires algébriques.

Première partie

1. Soient $x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ des éléments de \mathbf{R}^{n+1} , $(x_j^{(i)})_{j=1, \dots, n+1}$ les composantes de $x^{(i)}$ dans la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} . Pour tout $k = 1, \dots, n+1$ on note V_k le produit par $(-1)^{k+1}$ du déterminant de la matrice $(x_j^{(i)})$ où $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, n+1$. On note V le vecteur de \mathbf{R}^{n+1} de composantes V_k .

1.a) Montrer que V est orthogonal à tous les $x^{(i)}$.

1.b) Comparer les conditions suivantes :

i) $V = 0$

ii) la famille $(x^{(i)})_{i=1, \dots, n}$ est liée.

1.c) Exprimer en fonction de $\|V\|$ le déterminant des $n+1$ vecteurs $V, x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ dans la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} .

2.a) Montrer que, pour tout n -uple de vecteurs $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ linéairement indépendants, il existe un unique vecteur $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ ayant les propriétés suivantes

i) $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ est de norme 1 et orthogonal à tous les $x^{(i)}$

ii) le déterminant des $n+1$ vecteurs $W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), x^{(1)}, \dots, x^{(n)}$ dans la base canonique de \mathbf{R}^{n+1} est strictement positif.

2.b) Vérifier que, pour toute rotation R de \mathbf{R}^{n+1} , on a

$$W(R(x^{(1)}), \dots, R(x^{(n)})) = R(W(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})).$$

3. Soit (e_1, \dots, e_n) une base de \mathbf{R}^n , Q la matrice de coefficients $q_{i,j} = (e_i|e_j)$.

3.a) Montrer que Q est inversible et diagonalisable. Que peut-on dire de ses valeurs propres ?

3.b) Soit v un vecteur de \mathbf{R}^n , de coordonnées v_i dans la base (e_1, \dots, e_n) . Exprimer le vecteur ligne (v_1, \dots, v_n) en fonction de Q et du vecteur ligne $((v|e_1), \dots, (v|e_n))$.

Dans la suite du problème, on désigne par U une partie ouverte de \mathbf{R}^n , par $u = (u_1, \dots, u_n)$ un élément quelconque de U , par F une application de classe C^2 de U dans \mathbf{R}^{n+1} , par $\partial_i F$ (resp. $\partial_i \partial_j F$) ses dérivées partielles d'ordre 1 (resp. 2). On suppose que les n vecteurs $(\partial_i F)(u)$ sont linéairement indépendants pour tout u , et on pose $W(u) = W((\partial_1 F)(u), \dots, (\partial_n F)(u))$.

4.a) Vérifier que l'application $u \mapsto W(u)$ est de classe C^1 .

4.b) Comparer $((\partial_k W)(u)|(\partial_i F)(u))$ et $(W(u)|(\partial_i \partial_k F)(u))$.

4.c) Démontrer l'existence et l'unicité de nombres réels $a_{i,j}(u)$ tels que l'on ait

$$(\partial_i W)(u) = \sum_j a_{i,j}(u) (\partial_j F)(u).$$

4.d) On note respectivement $A(u)$, $S(u)$, $Q(u)$ les matrices de coefficients respectifs $a_{i,j}(u)$, $(W(u)|(\partial_i \partial_j F)(u))$, $((\partial_i F)(u)|(\partial_j F)(u))$. Vérifier que $A(u) = -S(u)Q(u)^{-1}$.

Deuxième partie

Dans toute la suite du problème, on suppose $n = 2$; on a donc un ouvert U de \mathbf{R}^2 et une application F de classe C^2 de U dans \mathbf{R}^3 telle que les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ soient linéairement indépendants pour tout u de U . On a en outre

$$W(u) = \frac{(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)}{\|(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)\|}$$

où \wedge désigne le produit vectoriel dans \mathbf{R}^3 . On pose

$$K(u) = \det A(u), \quad H(u) = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A(u)$$

où $A(u)$ est la matrice définie à la question **4.d)**. On note $F_i(u)$, $i = 1, 2, 3$ les composantes de $F(u)$; on suppose que U contient le point 0 et on fait l'étude de la surface $F(U)$ au voisinage du point $F(0)$.

5. Soit R une rotation de \mathbf{R}^3 . Montrer que les objets $\hat{K}(0)$ et $\hat{H}(0)$ associés à l'application $\hat{F} = R \circ F$ sont égaux respectivement à $K(0)$ et $H(0)$.

6. On suppose que, pour u suffisamment voisin de 0, $F(u)$ est de la forme

$$F(u) = (u_1, u_2, f(u_1, u_2))$$

avec $f(0) = (\partial_1 f)(0) = (\partial_2 f)(0) = 0$.

6.a) Calculer $K(0)$ et $H(0)$ en fonction des nombres

$$r = (\partial_1 \partial_1 f)(0), \quad s = (\partial_1 \partial_2 f)(0), \quad t = (\partial_2 \partial_2 f)(0).$$

6.b) (Cas d'un cylindre) On suppose que $f(u_1, u_2)$ est fonction de u_1 seul, soit $f(u_1, u_2) = g(u_1)$. Exprimer $H(0)$ en fonction de la courbure de la courbe Γ , intersection du cylindre avec le plan $x_2 = 0$.

7. Dans cette question, on considère le cas d'une surface de révolution :

$$F(u) = (f(u_1) \cos u_2, f(u_1) \sin u_2, u_1)$$

où f est une fonction strictement positive de classe C^2 définie sur un intervalle I .

7.a) Dire pour quelles valeurs de u les vecteurs $(\partial_1 F)(u)$ et $(\partial_2 F)(u)$ sont linéairement indépendants.

7.b) Vérifier que

$$A(u) = f(u_1)^{-1} (1 + f'(u_1)^2)^{-3/2} \begin{pmatrix} f(u_1) f''(u_1) & 0 \\ 0 & -(1 + f'(u_1)^2) \end{pmatrix}.$$

7.c) Donner une fonction f élémentaire pour laquelle $H(u)$ est nul pour tout u .

7.d) Montrer que, pour tous nombres réels α et β , $\alpha > 0$, il existe f satisfaisant

$$H(u) = 0 \text{ pour tout } u, \quad f(0) = \alpha, \quad f'(0) = \beta.$$

Interpréter géométriquement le résultat obtenu.

7.e) Calculer $K(u)$ pour une telle fonction f .

8. Indiquer, sans aucun calcul, des surfaces pour lesquelles $K(u)$ et $H(u)$ sont des constantes.

Troisième partie

Dans cette partie, on se propose d'étudier l'effet d'un changement de paramétrage sur les fonctions H et K .

Dans la situation du début de la deuxième partie on note $\frac{\partial F}{\partial u}$ la matrice (jacobienne) de coefficients $(\frac{\partial F}{\partial u})_{i,j} = \partial_j F_i$. Notation analogue pour $\frac{\partial W}{\partial u}$.

9. Vérifier que $\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial u} {}^t A(u)$.

On se donne maintenant un difféomorphisme Φ de U sur un autre ouvert \tilde{U} de \mathbf{R}^2 et on pose $\Psi = \Phi^{-1}$. Pour tout $u \in U$ on écrira aussi $\tilde{u} = \Phi(u)$; on pose $\tilde{F}(\tilde{u}) = F(u)$, c'est-à-dire $\tilde{F} = F \circ \Psi$, et on note $\tilde{W}(\tilde{u})$, $\tilde{A}(\tilde{u})$, $\tilde{H}(\tilde{u})$ les objets définis à partir de \tilde{F} et \tilde{u} comme $W(u)$, $A(u)$, $K(u)$, $H(u)$ l'ont été à partir de F et de u . On suppose U connexe par arcs.

10.a) Exprimer $\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{u}}$ en fonction de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$, puis $(\partial_1 \tilde{F})(\tilde{u}) \wedge (\partial_2 \tilde{F})(\tilde{u})$ en fonction de $(\partial_1 F)(u) \wedge (\partial_2 F)(u)$ et $\det \frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

10.b) Montrer qu'il existe $\varepsilon \in \{1, -1\}$ tel que l'on ait $\tilde{W}(\tilde{u}) = \varepsilon W(u)$ pour tout $u \in U$.

10.c) Exprimer $\tilde{A}(\tilde{u})$ en fonction de ε , $A(u)$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial \tilde{u}}$.

10.d) Comparer $\tilde{H}(\tilde{u})$ et $H(u)$, $\tilde{K}(\tilde{u})$ et $K(u)$.

* *
*