ECOLE POLYTECHNIQUE **FILIERE MP**

CONCOURS D'ADMISSION 1997

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

On désigne par $I = [a, b]$, où $a < b$, un intervalle compact et, pour tout entier $k \geq 0$, par $C^k(I)$ l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes de classe C^k sur I. Pour toute fonction f à valeurs complexes bornée [resp. continue de carré intégrable] sur I on pose

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \text{[resp. } \|f\|_2 = \left(\int_I |f(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \text{]}.$$

Pour tout nombre $\alpha > 0$ on note E_α l'espace vectoriel des fonctions à valeurs complexes f sur I ayant la propriété suivante : il existe un réel $K \geq 0$ tel que l'on ait

$$\forall x, y \in I \qquad |f(x) - f(y)| \leq K \, |x - y|^\alpha \, ;$$

enfin pour une telle f on note $K_\alpha(f)$ le plus petit de ces nombres K.

Première partie

1. Décrire E_α lorsque $\alpha > 1$.

Dans toute la suite, on suppose $0 < \alpha < 1$.

2.a) Vérifier que l'on a

$$C^1(I) \subset E_\alpha \subset C^0(I).$$

b) Indiquer une fonction appartenant à E_α mais non à $C^1(I)$.

3. Comparer E_α et E_β lorsque $0 < \alpha < \beta < 1$.

Pour toute f de E_α, on pose

$$\|f\|_\alpha = \|f\|_\infty + K_\alpha(f).$$

4. Montrer que $\| \quad \|_\alpha$ est une norme sur E_α pour laquelle E_α est complet.

Deuxième partie

Dans cette partie et la suivante, on suppose $I = [-\pi, \pi]$; on désigne par F_α l'ensemble des $f \in E_\alpha$ telles que $f(\pi) = f(-\pi)$, et on prolonge une telle f en une fonction sur $\mathbf{R}$ périodique de période 2π, encore notée f. Pour toute $f \in F_\alpha$ et tout $\varepsilon > 0$, on définit une fonction $T_\varepsilon(f)$ sur $\mathbf{R}$ par

$$T_\varepsilon(f)(x) = \int_{-\pi}^{-\varepsilon} \frac{f(x-y)}{y} dy + \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x-y)}{y} dy.$$

5. Démontrer les assertions suivantes :

a) Lorsque $\varepsilon \to 0$, $T_\varepsilon(f)(x)$ admet une limite. [On pourra introduire la fonction φ_x définie par $\varphi_x(y) = f(x-y) - f(x)$.]

On notera cette limite $T(f)(x)$.

b) La fonction $T(f)$ est continue.

c) L'application linéaire T est continue de F_α vers $C^0(I)$ muni de la norme $\| \quad \|_\infty$. [On donnera une majoration de sa norme.]

d) Si f est de classe C^k sur $\mathbf{R}$, avec $k > 0$, $T(f)$ est de classe C^{k-1}. [On déterminera $T(f)^{(m)}$ pour $m \leq k-1$.]

6. Calculer $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} T(f)(x)dx$.

Troisième partie

Pour toute fonction continue f sur I et tout $n \in \mathbf{Z}$ on pose

$$c_n(f) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx} f(x)dx.$$

Pour tout entier $n \geq 0$ on pose

$$\lambda_n = \int_0^{n\pi} \frac{\sin x}{x} dx.$$

7. Vérifier que l'on a $0 < \lambda_n < \lambda_1$ pour tout $n > 1$.

8. On fixe f dans F_α.

a) Calculer $c_n\Big(T(f)\Big)$ en fonction de $\lambda_{|n|}$ et de $c_n(f)$.

b) Déterminer le noyau de T.

c) Majorer $\|T(f)\|_2$ à l'aide de λ_1 et de $\|f\|_2$.

d) Donner une nouvelle démonstration de l'assertion de la question **5.d)**.

e) Montrer que, si $T(f)$ est de classe C^k avec $k > 0$, f est de classe C^{k-1}.

Quatrième partie

On ne suppose plus $I = [-\pi, \pi]$. Soit $f \in E_\alpha$; pour tout $x \in]a, b[$ et tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on pose

$$\begin{aligned}
S_\varepsilon(f)(x) &= \int_a^{x-\varepsilon} \frac{f(y)}{y-x} dy + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{f(y)}{y-x} dy \\
\Psi_x(y) &= f(y) - f(x) \quad \forall y \in I \\
A_\varepsilon(x) &= \int_a^{x-\varepsilon} \frac{\Psi_x(y)}{y-x} dy + \int_{x+\varepsilon}^b \frac{\Psi_x(y)}{y-x} dy \\
B_\varepsilon(x) &= S_\varepsilon(f)(x) - A_\varepsilon(x).
\end{aligned}$$

9. Calculer $B_\varepsilon(x)$.

10. Montrer que la fonction A_ε est continue.

11. Montrer que, lorsque ε tend vers 0, A_ε tend vers une fonction continue A définie sur $]a, b[$.

12. Etudier la convergence, lorsque $\varepsilon \to 0$, de $S_\varepsilon(f)$ vers une limite qu'on notera $S(f)$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b S(f)(x)dx$ et déterminer un réel positif C tel que l'on ait

$$\left| \int_a^b S(f)(x)dx \right| \leq C \|f\|_\alpha .$$

⋆ ⋆
⋆