

**ECOLE POLYTECHNIQUE**  
**ECOLE SUPERIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES**

CONCOURS D'ADMISSION 1997

FILIERE PC

**PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES**

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

Le but du problème est l'étude qualitative des solutions de l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0, \tag{E}$$

où  $q$  est une fonction continue, définie sur  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . On appelle solution de (E) toute fonction  $y$  définie sur  $\mathbf{R}$  et à valeurs dans  $\mathbf{R}$ , deux fois dérivable, qui vérifie  $y''(t) + q(t)y(t) = 0$ , pour tout nombre réel  $t$ .

On admettra sans démonstration que, pour tous nombres réels  $t_0, y_0, y'_0$ , il existe une *unique* solution  $y$  de (E) qui satisfait,

$$y(t_0) = y_0 \quad , \quad y'(t_0) = y'_0.$$

Toutes les fonctions considérées sont des fonctions à valeurs dans  $\mathbf{R}$ . On dit qu'une fonction  $f$  est positive (resp. négative) si elle vérifie  $f(t) \geq 0$  (resp.  $f(t) \leq 0$ ) pour tout nombre réel  $t$ .

On dira qu'un nombre réel  $t$  est un zéro d'une fonction  $f$  si  $f(t) = 0$ .

Dans la première partie, on étudie quelques propriétés des fonctions convexes qui seront utilisées aux questions **5.**, **6.** et **18.**.

**Première partie**

**1.** Soit  $f$  une fonction définie sur  $\mathbf{R}$ , convexe et positive. On suppose que  $f$  a deux zéros  $t_1, t_2$  et que  $t_1 < t_2$ . Montrer que  $f$  est nulle sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ .

**2.** Soit  $c$  un nombre réel et soit  $f$  une fonction convexe et majorée sur l'intervalle  $[c, +\infty[$ . On pose, pour tout  $t$  dans  $]c, +\infty[$ ,  $\varphi(t) = \frac{f(t) - f(c)}{t - c}$ . Montrer que la fonction  $\varphi$  a une limite négative ou nulle quand  $t$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que la fonction  $f$  est décroissante sur  $[c, +\infty[$ .

**3.** Montrer que toute fonction convexe et majorée sur  $\mathbf{R}$  est constante.

## Deuxième partie

On suppose dans cette deuxième partie que la fonction  $q$  est négative et n'est pas la fonction nulle.

4. Soit  $y$  une solution de  $(E)$ . Montrer que la fonction  $y^2$  est convexe.

5. Montrer que si  $y$  est une solution de  $(E)$  qui a deux zéros distincts, alors  $y$  est nulle.

6. Montrer que si  $y$  est une solution bornée de  $(E)$ , alors  $y$  est nulle.

7. Soit  $y_0$  un nombre réel strictement positif et soit  $y$  la solution de  $(E)$  qui satisfait  $y(0) = y_0$ ,  $y'(0) = 0$ .

a) Montrer que la fonction  $y$  est minorée par la constante  $y_0$ , et qu'elle est convexe.

b) On suppose de plus qu'il existe un nombre réel  $\omega > 0$  tel que  $q(t) \leq -\omega^2$  pour tout nombre réel  $t$ . Trouver la solution  $Y$  de l'équation  $y'' - \omega^2 y = 0$  qui satisfait  $Y(0) = y_0$ ,  $Y'(0) = 0$  et montrer que, pour tout  $t$ ,  $y(t) \geq Y(t)$ .

## Troisième partie

8. Soient  $y$  et  $z$  deux solutions de  $(E)$ . Montrer que la fonction  $yz' - y'z$  est constante.

9. On désigne par  $y_1$  et  $y_2$  les solutions de  $(E)$  qui satisfont

$$\begin{aligned}y_1(0) &= 1 & , & & y_1'(0) &= 0, \\y_2(0) &= 0 & , & & y_2'(0) &= 1.\end{aligned}$$

Montrer que  $(y_1, y_2)$  est une base de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}$  sur  $\mathbf{R}$  des solutions de  $(E)$ . Quelle est la valeur de  $y_1 y_2' - y_2 y_1'$ ? Les fonctions  $y_1$  et  $y_2$  peuvent-elles avoir un zéro commun ?

10. Montrer que, si  $q$  est une fonction paire, la fonction  $y_1$  est paire et la fonction  $y_2$  est impaire.

11. On suppose que la fonction  $q$  est périodique de période  $\pi$ , c'est-à-dire que, pour tout nombre réel  $t$ ,  $q(t + \pi) = q(t)$ .

a) Montrer que l'on définit un endomorphisme  $\mu$  de l'espace vectoriel  $\mathcal{S}$  en posant, pour tout  $y$  dans  $\mathcal{S}$  et tout nombre réel  $t$ ,

$$\left(\mu(y)\right)(t) = y(t + \pi).$$

b) Montrer que  $\mu$  est inversible.

c) Ecrire la matrice  $M$  de  $\mu$  dans la base  $(y_1, y_2)$  à l'aide des valeurs en  $\pi$  des fonctions  $y_1, y_2$  et de leurs dérivées. Calculer le déterminant de  $M$  et en déduire la matrice  $M^{-1}$ .

d) Ecrire la matrice de  $\mu^{-1}$  dans la base  $(y_1, y_2)$  à l'aide des valeurs en  $-\pi$  des fonctions  $y_1, y_2$  et de leurs dérivées.

12.a) Montrer que si la fonction  $q$  est paire et périodique de période  $\pi$ , les coefficients diagonaux de  $M$  sont égaux.

On suppose dans la suite de cette partie que la fonction  $q$  est paire et périodique de période  $\pi$  et l'on désigne par  $\alpha$  la valeur commune des coefficients diagonaux de  $M$ .

b) Quel est le polynôme caractéristique de l'endomorphisme  $\mu$  ?

**13.** On suppose  $|\alpha| > 1$ .

**a)** Montrer que l'endomorphisme  $\mu$  possède deux vecteurs propres linéairement indépendants, qui sont des solutions de  $(E)$  non bornées.

**b)** En déduire que toute solution bornée de  $(E)$  est nulle.

**14.a)** Montrer que si  $\alpha = 1$ ,  $(E)$  possède une solution non nulle périodique de période  $\pi$ .

**b)** Montrer que si  $\alpha = -1$ ,  $(E)$  possède une solution non nulle périodique de période  $2\pi$ .

**15.** En étudie le cas où  $|\alpha| < 1$ .

**a)** Montrer qu'il existe une base  $(u_1, u_2)$  de  $\mathcal{S}$  dans laquelle la matrice de  $\mu$  est la matrice d'une rotation. Montrer que  $u_1$  et  $u_2$  sont des fonctions bornées et que toute solution de  $(E)$  est bornée.

**b)** Montrer que la fonction  $r = \sqrt{(y_1)^2 + (y_2)^2}$  n'a pas de zéro, que la fonction  $\frac{1}{r^2}$  est minorée par une constante strictement positive et qu'aucune primitive de  $\frac{1}{r^2}$  n'est une fonction majorée sur  $]0, +\infty[$ .

**c)** Montrer que la fonction  $y_1$  a au moins un zéro sur  $]0, +\infty[$ . [On pourra remarquer que si  $y_1$  ne s'annulait pas sur  $]0, +\infty[$ , la fonction  $\text{Arctan} \frac{y_2}{y_1}$  serait dérivable sur cet intervalle]. En déduire que  $y_1$  a au moins deux zéros distincts.

#### Quatrième partie

**16.** Soit  $y$  une solution non nulle de  $(E)$  admettant un zéro  $a$ .

**a)** Montrer que  $y'(a) \neq 0$ . En déduire qu'il existe un nombre réel  $\varepsilon$  strictement positif tel que le seul zéro de  $y$  dans l'intervalle  $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  soit  $a$ .

**b)** On suppose que  $y$  possède aussi un zéro  $a'$ , avec  $a < a'$ . Montrer qu'il existe un zéro  $b$  de  $y$  vérifiant  $a < b$ , et tel que  $y$  n'ait aucun zéro dans l'intervalle  $]a, b[$ .

**c)** On considère une autre solution  $z$  de  $(E)$ . Montrer, en utilisant le résultat de la question **8.**, que  $z$  a un zéro dans l'intervalle  $]a, b[$ .

**17.** On suppose à nouveau que  $q$  est une fonction paire et périodique de période  $\pi$ , et que  $|\alpha| < 1$ , comme à la question **15.**. Montrer que toute solution de  $(E)$  a une infinité de zéros.

**18.** On suppose  $q$  non nulle, périodique de période  $\pi$  et positive. Montrer que toute solution de  $(E)$  a une infinité de zéros.

\* \*  
\*