

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\* \* \*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\* \* \*

Le but de ce problème est de démontrer quelques propriétés de certaines séries de fonctions et de certaines intégrales qui s'y ramènent.

**Première partie**

Dans cette partie on désigne par  $p$  un entier positif ou nul.

1. Vérifier que le rayon de convergence  $R_p$  de la série entière  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n^p}$ , où  $z$  est un nombre complexe, est égal à 1.

On pose  $L_p(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n^p}$  pour tout réel  $x$  tel que  $|x| < 1$ .

2. Calculer  $L_0(x)$  et  $L_1(x)$ .

3. Exprimer  $L'_p(x)$  à l'aide de  $L_{p-1}(x)$ .

4. Pour quelles valeurs de  $p$  a-t-on  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^p} < +\infty$  ?

Dans ce cas on notera cette somme  $L_p(1)$ .

5. On suppose  $p = 1$ , on note  $z$  un nombre complexe de module 1 et on pose  $A_0(z) = 0$  et, pour  $n \geq 1$ ,  $A_n(z) = z + z^2 + \dots + z^n$ .

a) Etant donnés deux entiers  $q$  et  $r$  vérifiant  $1 \leq q \leq r$ , trouver pour  $n = q - 1, \dots, r$  des nombres complexes  $u_n$  indépendants de  $z$ , tels que l'on ait

$$\sum_{q \leq n \leq r} \frac{z^n}{n} = \sum_{q-1 \leq n \leq r} A_n(z) u_n.$$

b) En déduire que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{z^n}{n}$  est convergente pour tout  $z$  vérifiant  $|z| \leq 1$ ,  $z \neq 1$ , et indiquer des ensembles sur lesquels la convergence est uniforme.

## Deuxième partie

**6.** Vérifier que la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^z}$ , où  $z$  est un nombre complexe donné, est absolument convergente si et seulement si  $\operatorname{Re} z > 1$ .

**7.** On définit une fonction réelle  $f$  sur l'intervalle  $]1, +\infty[$  par  $f(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^x}$ .

Montrer que  $f$  est de classe  $C^\infty$  et écrire sa dérivée  $k$ -ième sous la forme d'une série.

**8.** On fixe  $x \in ]1, +\infty[$  et  $h \in \mathbf{R}$  ; pour tout couple  $(n, k) \in \mathbf{N}^* \times \mathbf{N}$  on pose

$$u_{n,k} = \frac{(-h \ln n)^k}{k! n^x}.$$

**a)** Dire pour quelles valeurs de  $h$  la suite double  $(u_{n,k})$  est sommable.

**b)** Montrer que le rayon de convergence de la série de Taylor  $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(k)}(x) h^k}{k!}$  est au moins égal à  $x - 1$ , et comparer la somme de cette série à  $f(x + h)$ , lorsque  $|h| < x - 1$ .

## Troisième partie

Dans cette partie on fixe un entier  $k > 0$  et des entiers  $p_1, \dots, p_k \geq 0$ . On pose

$$I = \{(n_1, \dots, n_k) \in \mathbf{N}^k \mid 0 < n_1 < \dots < n_k\}.$$

Enfin, pour tout  $(n_1, \dots, n_k) \in I$  et tout  $z \in \mathbf{C}$ , on pose

$$v_{n_1, \dots, n_k}(z) = \frac{z^{n_k}}{n_1^{p_1} \dots n_k^{p_k}}.$$

**9.** Montrer que, si  $|z| < 1$ , la famille définie sur  $I$  par

$$(n_1, \dots, n_k) \mapsto v_{n_1, \dots, n_k}(z)$$

est sommable, et écrire sa somme  $L_{p_1, \dots, p_k}(z)$  sous la forme d'une série entière  $\sum_n a_n z^n$ . [On laissera  $a_n$  sous forme d'une somme finie.]

**10.** Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.

**11.a)** Montrer que, pour  $p$  entier  $\geq 2$  et  $m$  entier  $\geq 1$ , on a

$$\frac{1}{(p-1)(m+1)^{p-1}} \leq \sum_{n > m} \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{(p-1)m^{p-1}}.$$

**b)** Pour quelles suites  $(p_1, \dots, p_k)$  la somme  $\sum_{(n_1, \dots, n_k) \in I} \frac{1}{n_1^{p_1} \dots n_k^{p_k}}$  est-elle finie ? On la notera alors  $L_{p_1, \dots, p_k}(1)$ .

[On pourra procéder par récurrence sur  $k$ ].

**12.** Peut-on utiliser la méthode de la question 5 pour étudier  $L_{1,1}$  ?

#### Quatrième partie

**13.** Vérifier que pour  $0 \leq t \leq 1$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \frac{dy}{y-1}$  est intégrable sur  $[0, t]$  et exprimer son intégrale  $\Phi_1(t)$  sur  $[0, t]$  en fonction de  $L_2(t)$ .

**14.** Vérifier que pour  $0 \leq t \leq 1$  la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\Phi_1(y)dy}{y-1}$  est intégrable sur  $[0, t]$  et exprimer son intégrale  $\Phi_2(t)$  sur  $[0, t]$  en fonction de  $L_{2,2}(t)$ .

**15.** Montrer que la formule de récurrence

$$\Phi_{k+1}(t) = \int_0^t \frac{1}{x} \left[ \int_0^x \frac{\Phi_k(y)dy}{y-1} \right] dx$$

définit effectivement une suite de fonctions sur  $[0, 1]$ , que l'on exprimera à l'aide des diverses fonctions  $L_{p_1, \dots, p_k}$ .

\* \*  
\*