**ECOLE POLYTECHNIQUE** **FILIERE MP**

**CONCOURS D'ADMISSION 1998**

## DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

* * *

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

* * *

On se propose, dans ce problème, de démontrer quelques propriétés des sous-corps du corps des complexes $\mathbf{C}$. On rappelle que, si $K$ est un sous-corps d'un corps $K'$, ce dernier est, en particulier, un $K$-espace vectoriel, ce qui donne un sens à la $K$-dimension de $K'$, notée $\dim_K(K')$.

Si $K$ est un corps, on note $K[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $K$. On dit qu'un polynôme de degré $> 0$ est *irréductible* s'il ne peut pas s'écrire comme produit de deux polynômes de degrés $> 0$. Un polynôme est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1.

La question **1** est classique et servira surtout à fixer quelques notations ; la question **2** n'est pas utilisée dans la suite.

### Première partie

On désigne par $K$ un sous-corps de $\mathbf{C}$, par $\alpha$ un nombre complexe non nul, par $K[\alpha]$ le sous-K-espace vectoriel de $\mathbf{C}$ engendré par les nombres $\alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, enfin par $I_K(\alpha)$ l'ensemble des polynômes de $K[X]$ annulés par $\alpha$.

**1.a)** Montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{ll} (i) & \dim_K(K[\alpha]) < +\infty \\ (ii) & I_K(\alpha) \neq \{0\}\,. \end{array}$$

Si elles sont remplies, on dit que $\alpha$ est $K$-algébrique, ce que l'on suppose dans la suite de cette question.

**b)** Montrer qu'il existe un unique polynôme unitaire $P \in K[X]$ tel que tout élément de $I_K(\alpha)$ soit un multiple de $P$, et que $P$ est irréductible.

Ce polynôme $P$ sera noté $P_K(\alpha)$ et appelé le *polynôme $K$-minimal* de $\alpha$.

**c)** Comparer le degré de $P_K(\alpha)$ et $\dim_K(K[\alpha])$.

**d)** Montrer que $K[\alpha]$ est un corps.

**2.** *Applications numériques.* On prend $K = \mathbf{Q}$.

**a)** Déterminer le polynôme $\mathbf{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{2}$.

**b)** Déterminer le polynôme $\mathbf{Q}$-minimal de $\alpha = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

## Deuxième partie

On définit $K$ et $\alpha$ comme dans la première partie. On suppose que $\alpha$ est $K$-algébrique et on pose $n = \dim_K(K[\alpha])$.

**3.** Montrer que, si $P$ est un élément irréductible de $K[X]$, ses zéros dans $\mathbf{C}$ sont tous simples.

**4.a)** On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les zéros de $P_K(\alpha)$ dans $\mathbf{C}$. Montrer que pour tout $i = 1, \ldots, n$, il existe un unique morphisme de $K$-algèbres $\sigma_i$ de $K[\alpha]$ dans $\mathbf{C}$ tel que $\sigma_i(\alpha) = \lambda_i$.

**b)** Obtient-on de cette façon tous les morphismes de $K$-algèbres de $K[\alpha]$ dans $\mathbf{C}$ ?

**5.** Montrer que si $\beta$ est un élément de $K[\alpha]$ et si les $\sigma_i(\beta)$ sont deux à deux distincts, alors on a $K[\alpha] = K[\beta]$.

**6.** Etant donné un élément $\beta$ de $K[\alpha]$, démontrer l'existence de deux éléments $\beta_1$ et $\beta_2$ de $K[\alpha]$ vérifiant $K[\beta_1] = K[\beta_2] = K[\alpha]$ et $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.

[On pourra introduire, pour $i \neq j$, l'ensemble $E_{i,j}$ des éléments $\lambda$ de $K$ vérifiant

$$\sigma_i(\alpha + \lambda\beta) = \sigma_j(\alpha + \lambda\beta)]$$

## Troisième partie

On fixe un nombre complexe $\mathbf{Q}$-algébrique non nul $\theta$, et on pose $K = \mathbf{Q}[\theta]$, $n = \dim_{\mathbf{Q}}(K)$. On note $\sigma_i$, $i = 1, \ldots, n$, les morphismes de $\mathbf{Q}$-algèbres de $K$ dans $\mathbf{C}$.

Dans ce qui suit, $\alpha$ désigne un élément de $K$ ; on appelle $M_\alpha$ l'endomorphisme du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel $K$ défini par $M_\alpha(\beta) = \alpha\beta$ pour tout $\beta \in K$, et $\Delta_\alpha$ son polynôme caractéristique défini par $\lambda \mapsto \det(\lambda I - M_\alpha)$.

**7.** On pose $m = \dim_{\mathbf{Q}}(\mathbf{Q}[\alpha])$, $d = \dim_{\mathbf{Q}[\alpha]}(K)$. Vérifier que, si $(e_1, \ldots, e_d)$ est une $\mathbf{Q}[\alpha]$-base de $K$, les éléments $\alpha^p e_r$ où $p = 0, \ldots, m-1$ et $r = 1, \ldots, d$, forment une $\mathbf{Q}$-base de $K$.

**8.a)** Démontrer l'égalité $\Delta_\alpha = (P_{\mathbf{Q}}(\alpha))^d$.

[On pourra examiner d'abord le cas où $\mathbf{Q}(\alpha) = K$]

**b)** Démontrer l'égalité $\mathrm{Tr}(M_\alpha) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sigma_i(\alpha)$.

**9.** Pour tout $n$-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de $K^n$, on pose

$$D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \det\big(\mathrm{Tr}(M_{\alpha_i \alpha_j})\big)_{i,j=1,\ldots,n}.$$

Exprimer $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ en fonction de $\det\big(\sigma_i(\alpha_j)\big)_{i,j=1,\ldots,n}$.

**10.** Soit $A = \big(A_{i,j}\big)_{i,j=1,\ldots,n}$ une matrice à coefficients dans $\mathbf{Q}$, et soit $\beta_i = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} A_{i,p}\alpha_p$. Vérifier que

$$D(\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\det A)^2 D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n).$$

**11.** Montrer que

$$D(1, \theta, \ldots, \theta^{n-1}) = (-1)^{n(n-1)/2} \prod_{i \neq j} (\sigma_i(\theta) - \sigma_j(\theta)).$$

**12.** Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur $D(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, pour qu'un $n$-uple $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ soit une $\mathbf{Q}$-base de $K$.

**13.a)** Vérifier que le polynôme $X^3 - X - 1$ admet un unique zéro réel, que l'on note $\theta$.

**b)** Déterminer le polynôme $\mathbf{Q}$-minimal de $\theta$.

**c)** Calculer $D(1, \theta, \theta^2)$.

* *
*