

ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLE SUPERIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1998

FILIERE PC

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

Soit E un espace vectoriel réel, de dimension n , $n \geq 2$. Soit B une forme bilinéaire symétrique sur E , c'est-à-dire une application de $E \times E$ dans \mathbf{R} telle que pour tous $v, v', w \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, $B(v, v') = B(v', v)$ et $B(\lambda v + \mu w, v') = \lambda B(v, v') + \mu B(w, v')$.

On suppose qu'il existe une base (e_1, \dots, e_n) de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$B(e_i, e_i) = 1.$$

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, on pose

$$B(e_i, e_j) = b_{ij}.$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, et pour tout $v \in E$, on définit

$$\sigma_i(v) = v - 2B(v, e_i)e_i.$$

On désigne par 1_E l'application identique de E dans E , par $\sigma\sigma'$ la composée de deux endomorphismes σ, σ' de E , et par σ^k ($k \in \mathbf{N}^*$) les puissances d'un endomorphisme σ .

Première partie

1. On fixe $i \in \{1, \dots, n\}$.

a) Montrer que σ_i est une application linéaire de E dans E .

b) Calculer σ_i^2 .

c) Calculer la dimension du noyau F_i de la forme linéaire sur E définie par $v \mapsto B(v, e_i)$.

d) Déterminer les valeurs propres de σ_i et les sous-espaces propres associés. Quelle est la nature géométrique de σ_i ?

e) Montrer que $B(\sigma_i(v), \sigma_i(v')) = B(v, v')$ pour tous $v, v' \in E$.

2. On fixe i et j dans $\{1, \dots, n\}$, tels que $i \neq j$. Soit E_{ij} le sous-espace vectoriel de E engendré par e_i et e_j .

a) Montrer que E_{ij} est stable par $\sigma_i\sigma_j$. On notera ρ_{ij} l'endomorphisme de E_{ij} défini par restriction de $\sigma_i\sigma_j$.

b) Etudier ρ_{ij} lorsque $|b_{ij}| = 1$: valeurs propres, sous-espaces propres. Est-il diagonalisable ?

c) Montrer que, si $|b_{ij}| = 1$, il n'existe pas d'entier $k \in \mathbf{N}^*$ tel que $(\sigma_i \sigma_j)^k = 1_E$.

3. On suppose que $|b_{ij}| \leq 1$

a) Montrer que la restriction B_{ij} de B à $E_{ij} \times E_{ij}$ est un produit scalaire.

b) Montrer que E est somme directe de E_{ij} et de $F_i \cap F_j$.

4. On suppose dans la suite de cette partie que, pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$, il existe un entier $N_{ij} \geq 2$ tel que

$$b_{ij} = -\cos \frac{\pi}{N_{ij}}.$$

Le plan E_{ij} muni du produit scalaire B_{ij} est alors un plan euclidien. On y choisit l'orientation telle qu'une mesure de l'angle orienté (e_i, e_j) soit comprise entre 0 et π .

a) Montrer que ρ_{ij} est un automorphisme orthogonal, que l'on précisera, du plan E_{ij} .

b) Montrer que $(\sigma_i \sigma_j)^{N_{ij}} = 1_E$ et que, pour tout entier k tel que $1 \leq k < N_{ij}$, $(\sigma_i \sigma_j)^k \neq 1_E$.

5. On se place dans le cas où $n = 2$ et l'on pose

$$N_{12} = N.$$

a) Montrer que si $N \in \{2, 3, 4, 6\}$, il existe une base (e_1, f_2) de E , où $f_2 = \mu e_2$, $\mu \in \mathbf{R}$ et $1 \leq \mu < 2$, telle que σ_1 et σ_2 aient dans cette base des matrices à coefficients dans \mathbf{Z} . Discuter l'unicité d'une telle base.

b) Dans chacun des cas $N = 2, 3, 4, 6$, faire une figure soignée où l'on indiquera e_1 et f_2 et leurs images par les endomorphismes σ_1 et σ_2 .

c) S'il existe une base de E telle que σ_1 et σ_2 aient dans cette base des matrices à coefficients dans \mathbf{Z} , a-t-on nécessairement $N \in \{2, 3, 4, 6\}$? [On considérera la trace de $\sigma_1 \sigma_2$.]

Deuxième partie

Dans cette partie n et B sont quelconques.

6.a) On pose $\varepsilon_1 = e_1$ et, pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$,

$$\varepsilon_i = \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}(e_i).$$

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$e_i = \varepsilon_i + 2 \sum_{k=1}^{i-1} b_{ik} \varepsilon_k.$$

La famille $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ est-elle une base de E ?

b) On considère l'endomorphisme de E , $\tau = \sigma_1 \dots \sigma_n$.

Montrer que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$,

$$\tau(e_i) = -\varepsilon_i - 2 \sum_{k=i+1}^n b_{ik} \varepsilon_k.$$

c) Soit $C = (C_{ij})$ la matrice carrée d'ordre n définie par

$$C_{ij} = \begin{cases} 2b_{ij} & \text{si } i < j, \\ 0 & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Soit tC la matrice transposée de C et soit I_n la matrice identité d'ordre n .

Montrer que la matrice $I_n + C$ est inversible et que la matrice T de l'endomorphisme τ dans la base (e_1, \dots, e_n) est $-(I_n + C)^{-1}(I_n + {}^tC)$.

d) Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\det(\lambda I_n - T) = \det((\lambda + 1)I_n + \lambda C + {}^tC).$$

7. [Cette question est indépendante des précédentes.] Soient $(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)$ une famille de nombres réels et λ un nombre réel. On considère, pour $n \geq 3$, le déterminant d'ordre n , noté $P_{(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)}(\lambda)$, défini de la manière suivante :

- les termes diagonaux sont égaux à $\lambda + 1$,
- pour $1 \leq i \leq n - 1$, le terme en position $(i + 1, i)$ est β_i et le terme en position $(i, i + 1)$ est $\lambda\beta_i$,
- le terme en position $(n, 1)$ est β_n ,
- le terme en position $(1, n)$ est $\lambda\beta_n$,
- les autres termes sont nuls.

Pour $n \geq 4$, ce déterminant s'écrit donc :

$$P_{(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)}(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda\beta_1 & 0 & \cdot & \lambda\beta_n \\ \beta_1 & \lambda + 1 & \lambda\beta_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \lambda + 1 & \lambda\beta_{n-1} \\ \beta_n & 0 & \cdot & \beta_{n-1} & \lambda + 1 \end{vmatrix}.$$

a) Calculer $P_{(\beta_1, \beta_2, \beta_3)}(\lambda)$.

b) Calculer le coefficient $a_{(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)}$ du terme de degré $n - 1$ du polynôme en λ , $P_{(\beta_1, \dots, \beta_{n-1}, \beta_n)}(\lambda)$. [On considérera d'abord le cas où $\beta_n = 0$.]

Troisième partie

On suppose encore que $n \geq 3$ et que, pour $i \neq j$, $b_{ij} = -\cos \frac{\pi}{N_{ij}}$, où les entiers N_{ij} sont tels que $N_{1n} \in \{3, 4, 6\}$ et pour tout $i \in \{1, \dots, n - 1\}$, $N_{i, i+1} \in \{3, 4, 6\}$, tous les autres coefficients N_{ij} étant égaux à 2.

On désigne par p (resp. q) le nombre de couples (i, j) , $1 \leq i < j \leq n$, tels que $N_{ij} = 4$ (resp. $N_{ij} = 6$).

8. On suppose que p et q sont pairs. Montrer qu'il existe une famille (μ_1, \dots, μ_n) de nombres réels non nuls tels que, dans la base $(\mu_1 e_1, \dots, \mu_n e_n)$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice de σ_i soit à coefficients dans \mathbf{Z} .

9. La condition « p et q pairs » est-elle une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une base de E telle que, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la matrice de σ_i soit à coefficients dans \mathbf{Z} ? [On étudiera la trace de l'endomorphisme τ défini à la question 6.b) et l'on utilisera les résultats de la deuxième partie.]

★ ★
★