

PREMIERE COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée: 4 heures)

L'utilisation des calculatrices n'est pas autorisée pour cette épreuve.

\*\*\*

*On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*

\*\*\*

Notations

Pour toute fonction  $f$  de deux variables réelles  $x$  et  $y$ , on posera  $\partial_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$  et  $\partial_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$ . Par ailleurs on pose

$$\begin{aligned}\Pi_+ &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > 0\} \\ \bar{\Pi}_+ &= \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq 0\}.\end{aligned}$$

Enfin on désigne par  $K$  la fonction sur  $\Pi_+$  définie par

$$K(x, y) = \frac{1}{\pi} \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Première partie

1. Calculer  $\int_{-\infty}^{+\infty} K(x, y) dx$ .
2. Calculer  $\partial_1 K$ ,  $\partial_2 K$ ,  $\partial_1^2 K + \partial_2^2 K$ .
3. Montrer que, si  $m$  et  $n$  sont deux entiers  $\geq 0$ ,  $(\partial_1^m \partial_2^n K)(x, y)$  peut s'écrire sous la forme  $\frac{P_{m,n}(x, y)}{(x^2 + y^2)^{m+n+1}}$  où  $P_{m,n}$  est un polynôme dont le degré par rapport à  $x$  est majoré par  $2(m+n)$ .

Deuxième partie

Dans cette partie, la lettre  $f$  désigne une fonction complexe continue bornée sur  $\mathbf{R}$ .

4. Montrer que, pour tout  $(x, y)$  dans  $\Pi_+$ , la fonction  $t \mapsto f(t)K(x-t, y)$  est intégrable sur  $\mathbf{R}$ .

On notera  $\Phi_f(x, y)$  son intégrale.

- 5.a) Montrer que la fonction  $\Phi_f$  ainsi définie sur  $\Pi_+$  est continue et bornée

b) On désigne par  $E$  (resp.  $F$ ) l'espace des fonctions complexes continues bornées sur  $\mathbf{R}$  (resp. sur  $\Pi_+$ ) et on le munit de la norme  $\varphi \mapsto \|\varphi\| = \sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi(x)|$  (resp.  $\sup_{(x,y) \in \Pi_+} |\varphi(x, y)|$ ). Vérifier que l'application linéaire  $f \mapsto \Phi_f$  de  $E$  dans  $F$  est continue et préciser sa norme.

6. Montrer que  $\Phi_f$  est de classe  $C^\infty$ . Calculer  $\partial_1^2 \Phi_f + \partial_2^2 \Phi_f$ .

7. Montrer que, pour tout réel  $a > 0$ ,  $\Phi_f$  est uniformément continue sur le demi-plan  $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq a\}$ .

8. Soit  $x_0$  un réel,  $\varepsilon$  un réel  $> 0$ . Trouver un réel  $\eta > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in \Pi_+, |x - x_0| \leq \eta, y \leq \eta \implies |\Phi_f(x, y) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

On notera  $\bar{\Phi}_f$  la fonction continue sur  $\bar{\Pi}_+$  égale à  $\Phi_f$  sur  $\Pi_+$  et telle que  $\forall x \in \mathbf{R}, \bar{\Phi}_f(x, 0) = f(x)$ .

9. On suppose  $f$  uniformément continue.

a) Soit  $\varepsilon$  un réel  $> 0$ . Trouver un réel  $\eta > 0$  tel que

$$\forall (x, y) \in \Pi_+, \forall x_0 \in \mathbf{R}, |x - x_0| \leq \eta, y \leq \eta \implies |\Phi_f(x, y) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

b) Montrer que la fonction  $\bar{\Phi}_f$  est uniformément continue.

### Troisième partie

10. On prend ici pour  $f$  la fonction  $x \mapsto e^{i\alpha x}$  où  $\alpha$  est un réel  $> 0$  fixé.

a) Montrer qu'il existe une fonction  $g$  telle que l'on ait  $\Phi_f(x, y) = f(x)g(y)$ .

b) Ecrire une équation différentielle linéaire du second ordre satisfaite par  $g$  et en déduire explicitement  $\Phi_f$ .

11. On fixe un réel  $a > 0$ . Explicitiez la fonction  $\psi$  sur  $\mathbf{R}$  définie par

$$\psi(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ipx}}{x^2 + a^2} dx,$$

puis la fonction  $y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ipy} \psi(p) dp$ .

12. On note ici  $f$  une fonction continue périodique de période  $2\pi$  et  $y_0$  un réel  $> 0$ . On pose  $h(x) = \Phi_f(x, y_0)$ .

a) Vérifier que  $h$  est périodique de période  $2\pi$ .

b) Exprimer les coefficients de Fourier de  $h$  en fonction de ceux de  $f$ . [On montrera d'abord que l'on

a

$$\hat{h}(n) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-inx} \left( \int_{-A}^A f(x-t) K(t, y_0) dt \right) dx.]$$

### Quatrième partie

On suppose ici que la fonction continue  $f$  tend vers 0 lorsque  $x$  tend vers  $\pm\infty$ .

13. Montrer que la fonction  $\bar{\Phi}_f$  est uniformément continue.

14. Soit  $\varepsilon$  un réel  $> 0$ ; déterminer des réels  $a$  et  $u$  tels que l'on ait  $|\bar{\Phi}_f(x, y)| \leq \varepsilon$  pour tout point  $(x, y)$  de  $\bar{\Pi}_+$  satisfaisant  $y \geq a$  ou  $|x| \geq u$ .

15. Déterminer la limite de  $\bar{\Phi}_f(x, y)$  lorsque  $|x| + y$  tend vers l'infini.

16. On désigne par  $E_0$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des fonctions qui tendent vers 0 lorsque la variable tend vers  $\pm\infty$ .

Déterminer la norme de l'application  $f \mapsto \Phi_f$  de  $E_0$  dans  $F$ .

\* \*

\*