ECOLE POLYTECHNIQUE
ECOLE SUPERIEURE DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE INDUSTRIELLES

CONCOURS D'ADMISSION 1999 **FILIERE PC**

DEUXIEME COMPOSITION DE MATHEMATIQUES

(Durée : 3 heures)

L'utilisation des calculatrices **est autorisée** pour cette épreuve.

⋆⋆⋆

On attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.

⋆⋆⋆

Le but de ce problème est l'étude d'une forme linéaire sur l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles.

Première partie

On fixe un entier $n \in \mathbf{N}$ et l'on désigne par E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré inférieur ou égal à n. On considère la forme linéaire L sur E définie par

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx.$$

1. Déterminer l'image par L de la fonction polynomiale P telle que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$.

Déterminer la dimension du noyau de L, puis une base de ce noyau.

2. On considère des nombres réels $(x_i)_{0 \leq i \leq n}$ tels que

$$-1 \leq x_0 < x_1 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_n \leq 1.$$

a) Montrer que, pour tout i, $0 \leq i \leq n$, il existe une fonction polynomiale $P_i \in E$ telle que

$$P_i(x_i) = 1$$
$$\text{et} \qquad P_i(x_j) = 0 \qquad \text{pour } j \neq i,\ 0 \leq j \leq n.$$

b) Montrer qu'il existe une unique famille de nombres réels $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ telle que

$$\forall P \in E, \quad L(P) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

3. On suppose que, pour tout i, $0 \leq i \leq n$, $x_{n-i} = -x_i$. Montrer que $\lambda_{n-i} = \lambda_i$. En déduire que, si n est pair, toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à $n+1$ vérifie

$$\int_{-1}^{1} P(x)dx = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

4. Soit f une fonction réelle de classe C^{n+1} sur l'intervalle $[-1,1]$.

a) On pose $M_{n+1} = \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|$, où $f^{(n+1)}$ désigne la dérivée $(n+1)$-ième de f. Déterminer des réels positifs α et β tels que

$$|\int_{-1}^{1} f(x)dx - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(x_i)| \leq M_{n+1}(\alpha + \beta \sum_{i=0}^{n} |\lambda_i|)$$

où les $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n}$ sont les nombres réels déterminés à la question **2.**.

b) On suppose que f est de classe C^{n+2} sur $[-1,1]$, que n est pair et que les points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ sont choisis tels que $x_{n-i} = -x_i$, $0 \leq i \leq n$.

Modifier la majoration précédente en utilisant $M_{n+2} = \sup_{x\in[-1,1]} |f^{(n+2)}(x)|$.

5. On suppose que $n = 4$ et l'on choisit

$$x_0 = -1,\ x_1 = -\frac{1}{2},\ x_2 = 0,\ x_3 = \frac{1}{2},\ x_4 = 1.$$

a) Calculer λ_0, λ_1, λ_2, λ_3, λ_4.

b) En utilisant le résultat de la question **4.b)**, donner une majoration de

$$\left| \int_{-1}^{1} e^{(x/4)^2} dx - \sum_{i=0}^{4} \lambda_i e^{(x_i/4)^2} \right|,$$

où les $(\lambda_i)_{0\leq i\leq 4}$ sont les nombres trouvés en **a)**.

Deuxième partie

Les notations sont celles de la première partie.

6. Soit N une norme sur E. On pose

$$\mathcal{N}(L) = \sup_{\substack{P\in E \\ N(P)\leq 1}} |L(P)|.$$

a) Justifier l'existence de $\mathcal{N}(L)$ et montrer qu'il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = \mathcal{N}(L)$.

b) Montrer que si K est un nombre réel positif tel que

$$\forall P \in E, \quad |L(P)| \leq K\, N(P),$$

alors $\mathcal{N}(L) \leq K$. Montrer que si, de plus, il existe $Q \in E$ tel que $N(Q) = 1$ et $|L(Q)| = K$, alors $\mathcal{N}(L) = K$.

7. Pour $P \in E$ tel que $P(x) = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p$, on pose

$$N_\infty(P) = \sup_{0\leq p\leq n} |a_p| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^{n} (a_p)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Comparer les normes N_∞ et N_2.

8. On désigne par $\mathcal{N}_\infty(L)$ et $\mathcal{N}_2(L)$ les nombres $\mathcal{N}(L)$ définis à la question **6.**, quand on choisit pour N respectivement N_∞ et N_2.

a) Trouver $Q_\infty \in E$ tel que $N_\infty(Q_\infty) = 1$ et $|L(Q_\infty)| = \mathcal{N}_\infty(L)$.

b) Trouver $Q_2 \in E$ tel que $N_2(Q_2) = 1$ et $|L(Q_2)| = \mathcal{N}_2(L)$.

Troisième partie

Soit F l'espace vectoriel des fonctions polynomiales réelles de degré quelconque.

Pour $P \in F$, de degré $d(P)$, définie par $P(x) = \sum_{p=0}^{d(P)} a_p x^p$, on pose

$$N_\infty(P) = \sup_{0 \le p \le d(P)} |a_p| \text{ et } N_2(P) = \left(\sum_{p=0}^{d(P)} (a_p)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

et l'on définit ainsi des normes sur F [par convention, $N_\infty(0) = N_2(0) = 0$].

Pour $P \in F$, on pose encore $L(P) = \int_{-1}^{1} P(x)dx$.

9.a) Trouver une suite $(P_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de F telle que $\forall k \in \mathbf{N},\ N_\infty(P_k) = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty} L(P_k) = +\infty$.

b) L'application linéaire L est-elle continue ?

10.a) Montrer que $\sup\limits_{\substack{P\in F \\ N_2(P)\le 1}} |L(P)|$ existe. On désigne ce nombre par $|||L|||$.

b) Existe-t-il une fonction polynomiale $Q \in F$ telle que $N_2(Q) = 1$ et $|L(Q)| = |||L|||$?

* *
*