

Leçon d'introduction

Fabien Besnard

9 septembre 2009

1 Les mathématiques : inventées ou découvertes ?

Nous allons débiter ce cours par un peu de philosophie. Il existe essentiellement deux points de vue sur les mathématiques. Selon le premier, que l'on qualifie de *formaliste*, les concepts mathématiques sont créés de toute pièce par l'esprit humain, et leur manipulation n'est qu'un jeu formel, soumis à certaines règles. Le second point de vue consiste à considérer que les objets mathématiques existent réellement, et que les mathématiciens ne font que les découvrir. Le premier à avoir explicitement défendu cette position était le philosophe Platon, et on nomme aujourd'hui « *platoniciens* » ceux qui, peut-être à quelques nuances près, partagent cette vision.

Peut-être certains d'entre vous se reconnaissent-ils spontanément dans l'un de ces deux points de vue, et ont même une certaine difficulté à concevoir que l'on puisse défendre l'autre. C'est d'ailleurs une constante dans ce débat déjà plus que millénaire : les adversaires ont souvent beaucoup de mal à se comprendre. On trouve un exemple de cette incompréhension dans [1], qui est une référence désormais classique et que je ne saurais trop conseiller. Quant à moi, et contrairement à ce qui serait d'usage dans un cours de philosophie, je ne chercherai nullement à être équilibré dans cette introduction : mes arguments iront exclusivement dans le sens du platonisme ! Il y a deux raisons à cela. La première est que, comme la grande majorité des mathématiciens, j'adhère à cette opinion. La seconde est que, même si le point de vue formaliste ne manque pas d'intérêt, il me semble qu'une version « vulgaire » de cette doctrine est assez répandue dans le monde étudiants, sous la forme d'une défiance envers des mathématiques résumées à la manipulation purement conventionnelle de signes dépourvus de sens et sans lien avec la réalité. Il m'apparaît important de lutter contre cette idée. Or pour montrer que les mathématiques ont un lien avec la réalité, quoi de plus probant que de montrer qu'elles sont réelles ! Vous comprenez maintenant la raison de cette entrée en matière peut-être un peu surprenante. Au passage, nous en profiterons pour rappeler quelques points et donner un aperçu de certaines notions sur lesquelles nous reviendrons au cours de cette année.

2 Les nombres complexes

Mon premier argument pour affirmer que les maths existent en dehors de nous est que, parfois, ce que l'on croit construire tout exprès pour résoudre un problème particulier se révèle d'une puissance insoupçonnée. Le meilleur exemple est celui des nombres complexes.

Pour construire les nombres complexes, vous avez juste besoin que l'équation $x^2 + 1 = 0$ ait une solution, et le nombre i semble avoir été inventé tout exprès pour la résoudre. Les autres nombres complexes s'obtiennent simplement par combinaison avec les réels, de sorte que tout nombre complexe s'écrive $a + bi$ avec a et b dans \mathbb{R} . En fait, il est fort probable que votre cours de Terminale ait introduit les nombres complexes de cette manière, et contienne une définition qui ressemble à celle-ci :

Définition 2.1 *On considère des objets appelés nombres complexes, incluant les nombres réels, un objet $i \notin \mathbb{R}$, et tous ceux qu'on peut obtenir par addition et multiplication. L'addition et la multiplication prolongent celles de \mathbb{R} et vérifient les règles suivantes : associativité et commutativité de l'addition et de*

la multiplication, distributivité de la multiplication sur l'addition. Le réel 0 est neutre pour + et 1 est neutre pour \times . À toutes ces règles on ajoute $i^2 = -1$.

Avec une telle définition, il semble qu'on aille vraiment dans le sens du formalisme. Le mot « imaginaire » à lui seul donne le ton. . . Seulement voilà, il se passe un petit miracle ! Tout d'abord, même si le nombre i est construit tout exprès pour résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$, il se trouve qu'avec les nombres $a + bi$ on peut résoudre n'importe quelle équation du second degré à coefficients réels. Vous connaissez la démonstration mais je vais quand même vous la rappeler.

Soit l'équation

$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \tag{1}$$

On la met sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right)^2 - \frac{\Delta}{4\alpha^2} &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

Remarquez que j'ai divisé par α en supposant qu'il était non nul, sinon notre équation ne serait pas du second degré, et que j'ai posé bien entendu $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$.

À partir de là, tout ce que vous avez à faire c'est de trouver un nombre ω tel que $\omega^2 = \Delta$. De cette façon l'équation (2) équivaut à

$$\left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) - \frac{\omega}{2\alpha}\right] \left[\left(x + \frac{\beta}{2\alpha}\right) + \frac{\omega}{2\alpha}\right] = 0 \tag{3}$$

et les solutions de (1) sont bien sûr

$$\frac{-\beta + \omega}{2\alpha} \text{ et } \frac{-\beta - \omega}{2\alpha} \tag{4}$$

Vous pouvez poser $\omega = \sqrt{\Delta}$ si Δ est un réel positif, et $\omega = i\sqrt{-\Delta}$ si Δ est un réel négatif. Maintenant ce que vous ne savez peut-être pas, c'est que l'on n'a nullement besoin de supposer que les coefficients α, β, γ soient réels dans cette histoire. Supposons plus généralement qu'il s'agisse de nombres complexes. On constate que rien ne change dans la mise sous forme canonique. Ainsi l'équation (3) est toujours équivalente à l'équation (1), et les solutions sont toujours données par (4), à partir du moment où l'on peut trouver un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = \Delta$. Or il se trouve qu'on peut toujours faire cela ! La technique est expliquée au paragraphe ??.

Exercice 2.1 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $x^2 + (1 + i)x + 5i = 0$.

Ainsi, en ajoutant aux nombres réels une solution « imaginaire » de l'équation $x^2 + 1 = 0$, il se trouve que l'on a juste ce qu'il faut pour résoudre toutes les équations du second degré, y compris celles à coefficients complexes. Ce n'est pas du tout quelque chose d'évident. Mais il y a encore moins évident et encore plus innatendu ! À force d'utiliser les nombres complexes, entre le XVIe et le XVIIIe siècle, les mathématiciens ont peu à peu acquis la conviction que les toutes les équations polynomiales avaient leurs solutions parmi les nombres complexes. Ce résultat a été énoncé et prouvé pour la première fois par d'Alembert, mais sa preuve, qui manquait de rigueur, a été complétée plus tard par Gauss, si bien qu'on le connaît aujourd'hui sous le nom de « théorème de d'Alembert-Gauss ». Le voici :

Théorème 2.1 (Théorème de d'Alembert-Gauss)

Toute équation polynomiale de degré $n \geq 1$ à coefficients dans \mathbb{C} , i.e. toute équation du type :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \tag{5}$$

avec $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$, admet au moins une solution dans \mathbb{C} .

Ce théorème est si important qu'on l'appelle parfois « le théorème fondamental de l'algèbre ». Mais n'allez pas en conclure que l'algèbre s'est arrêté au XVIIIe siècle ! On a démontré bien d'autres théorèmes fondamentaux depuis.

En utilisant le théorème de d'Alembert-Gauss plusieurs fois, il est facile de voir que l'équation (5) admet en fait exactement n solutions dans \mathbb{C} , à condition toutefois de convenir qu'une même solution puisse être comptée plusieurs fois. En effet, en utilisant une première fois le théorème, on trouve une solution $z_1 \in \mathbb{C}$ qui permet la factorisation suivante :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (z - z_1) Q(z) \quad (6)$$

où $Q(z)$ est un polynôme de degré $n - 1$. En appliquant le théorème à l'équation $Q(z) = 0$, on trouve une solution z_2 , et en itérant le procédé on obtient au final la factorisation complète du polynôme de départ :

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = a_n (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n) \quad (7)$$

Ceci montre que les solutions de l'équation (5) sont exactement les nombres complexes z_1, z_2, \dots, z_n .

Une façon moderne d'énoncer le théorème de d'Alembert-Gauss est de dire que les nombres complexes forment « un corps algébriquement clos ». Le fait que l'on obtienne un corps algébriquement clos simplement en ajoutant le nombre i aux réels et en considérant toutes les combinaisons du type $a + bi$ est très étonnant, et semble bien éloigné de la définition (2.1). On a vraiment l'impression de découvrir, et non pas d'inventer, quelque chose.

Incidemment, le théorème de d'Alembert-Gauss nous dit que quelque chose existe, à savoir une solution d'une équation, mais ne nous donne aucun moyen pour la trouver. En fait, pour les degrés 3 et 4 il existe des techniques similaires à celle pour le degré 2 qui permettent de trouver les solutions. C'est d'ailleurs la raison historique de « l'invention », mais si vous suivez mon point de vue vous direz plutôt de la découverte, des nombres complexes. Ce n'est pas du tout pour résoudre l'équation $x^2 + 1 = 0$ qu'on a imaginé le nombre i . Tout le monde était satisfait de dire que cette équation n'avait pas de solution. En revanche, une simple étude de fonction montre que l'équation $x^3 - 3x + 1 = 0$ admet trois solutions réelles. Mais pour déterminer ces solutions par le calcul, vous êtes obligés de passer par les nombres complexes ! Les parties imaginaires s'éliminent, ce qui fait que le résultat du calcul est un réel, mais vous ne pouvez pas faire le calcul autrement. Pour résoudre une équation à coefficients réels et dont les solutions sont toutes réelles, les nombres complexes sont un intermédiaire incontournable. On peut donc bien dire qu'on a « inventé » les nombres complexes, mais en réalité on n'avait pas le choix. Et quand on a pas le choix, est-ce qu'on peut encore dire qu'on invente ?

Pour être tout-à-fait complet, il faut mentionner que les techniques de résolution d'équations évoquées plus haut ne s'étendent pas au-delà du degré 4. Beaucoup de gens ont essayé de trouver de telles techniques pour les équations de degré 5, mais personne n'y est arrivé, jusqu'à ce que, dans les années 1820-1830, Galois et Abel démontrent que c'était impossible¹. En mathématiques il y a donc parfois de bonnes surprises, comme avec le théorème de d'Alembert-Gauss, mais aussi parfois de mauvaises. Dans le cas de la résolution des équations de degré 5 ou plus, on se fait vite une raison, car résoudre par le calcul² de telles équations n'a en fait pratiquement pas d'utilité. D'ailleurs, même si les techniques existent pour les degrés 3 et 4, à vrai dire personne ne les utilise ! En revanche, pour démontrer son théorème, Galois a dû introduire de nouveaux objets, qu'on appelle *les groupes*. Et ça c'est beaucoup plus intéressant que la résolution des équations polynomiales ! Nous aurons d'ailleurs quelques mots à dire sur les groupes cette année.

3 Les trinions

Malgré tous les services qu'ils rendent, les nombres complexes n'ont pas été immédiatement en odeur de sainteté auprès des mathématiciens. Leur caractère « imaginaire » ou « impossible », ainsi qu'ils ont

1. Abel a démontré ce théorème en premier, mais la méthode de Galois est plus profonde et plus précise.

2. i.e. en utilisant des additions, multiplications, et des extractions de racines n -ièmes.

parfois été nommés, en rebuttait plus d'un. C'est que les mathématiciens de l'époque étaient loin d'être des partisans de l'abstraction pure. Il avait déjà fallu attendre le XVI^e siècle pour que certains d'entre eux se permettent d'écrire quelque chose comme « x^4 ». Pourquoi ? Tout simplement parce qu'un nombre devait forcément représenter une quantité concrète. Or que peut représenter concrètement une puissance quatrième ? Si x représente une longueur, x^2 représente une aire et x^3 un volume, mais quel sens donner à x^4 ? Avec de telles idées en tête, il était bien difficile d'accepter un nombre dont le carré est négatif. À vrai dire les nombres négatifs eux-mêmes ont mis très longtemps à être acceptés !

Mais tout a changé avec l'apparition du plan complexe, au tout début du XIX^e siècle. À partir du moment où l'on pouvait voir les complexes, ils devenaient soudainement plus fréquentables. Ceci contient d'ailleurs une petite leçon : si vous trouvez que quelque chose est trop abstrait, essayez de faire une figure.

Une fois qu'on connaît le plan complexe, il y a une idée complètement naturelle, que chacun peut avoir : *et pourquoi ne ferait-on pas la même chose avec l'espace ?* Il se trouve que c'est le physicien et mathématicien irlandais William Rowan Hamilton qui l'a eu le premier, dans les années 1840. Précisons les choses. On fixe une base orthonormée directe de l'espace, et on associe à chaque vecteur³ son « affixe » $a + bi + cj$, où a, b, c sont des nombres réels, qui sont en fait les coordonnées du vecteur dans la base choisie, i est le nombre imaginaire bien connu, et j est un nombre d'une nouvelle sorte. On appelle « trinion » tout nombre de la forme

$$t = a + bi + cj \tag{8}$$

On voit que les nombres complexes sont des cas particuliers de trinions, qui sont associés aux vecteurs horizontaux pour lesquels on a $c = 0$, tandis que les trinions du type cj sont dirigés selon la verticale. L'addition de deux trinions ne pose pas de problème, et correspond à l'addition des vecteurs dans l'espace. Multiplier un trinion $t = a + bi + cj$ par un réel λ est également simple : le résultat est $\lambda t = \lambda a + (\lambda b)i + (\lambda c)j$, et correspond à la multiplication d'un vecteur par un réel. Nous voulons que la multiplication des trinions prolonge celle de \mathbb{C} . Donc si deux trinions sont dans \mathbb{C} , leur multiplication suit les règles habituelles de la multiplication des complexes. Maintenant nous allons réfléchir à la façon dont on peut définir la multiplication de deux trinions quelconques. Disons tout de suite que nous allons suivre un chemin beaucoup plus direct que celui que Hamilton a lui-même parcouru.

Nous avons besoin de savoir multiplier i par j . Soient donc $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que

$$ij = a + bi + cj \tag{9}$$

En multipliant par i de chaque côté on obtient :

$$\begin{aligned} i(ij) &= ai - b + i(cj) \\ \Rightarrow i^2 j &= ai - b + cij \\ \Rightarrow -j &= ai - b + cij \end{aligned} \tag{10}$$

Il est clair que c ne doit pas être nul, sinon l'équation (10) nous dirait que $j = b - ai \in \mathbb{C}$, ce qui est exclu. On obtient donc :

$$ij = \frac{b}{c} - \frac{a}{c}i - \frac{1}{c}j \tag{11}$$

En comparant les équations (9) et (11) on voit que la coordonnée selon j du trinion ij doit être à la fois égale à c et à $-1/c$, ce qui est impossible puisque $c \in \mathbb{R}$.

Nous arrivons donc à la conclusion suivante : les trinions n'existent pas ! On a beau essayer de les construire, quelque chose qui ressemble fort à la réalité refuse de se laisser contraindre !

3. Il faut préciser que Hamilton raisonnait en terme de points, car les vecteurs n'étaient pas connus à cette époque. Nous adoptons le point de vue des vecteurs car l'addition des trinions s'interprète immédiatement comme l'addition des vecteurs dans l'espace.

4 Les quaternions

Le génie de Hamilton c'est de ne pas avoir abandonné pour autant. Il avait passé tant de temps à chercher un ensemble de nombre plus grand que \mathbb{C} dans lequel on puisse additionner, multiplier et diviser, qu'il a continué à y penser, et un jour, le 16 octobre 1843 pour être précis, en se promenant avec sa femme, il a trouvé la solution. Il a soudainement compris qu'on pouvait généraliser les nombres complexes comme il le désirait, à condition de poser $ij = k$, où k n'est pas de la forme $a + bi + cj$. Autrement dit, k ne représente pas un vecteur de l'espace à trois dimensions, il « pointe » dans une quatrième dimension !

Là encore il y a une petite leçon. Trois leçons en fait. La première, c'est qu'il ne faut jamais abandonner. La deuxième c'est qu'il faut savoir sortir des sentiers battus : c'est une idée banale aujourd'hui, mais personne à l'époque n'avait jamais entendu parler de quatrième dimension. Enfin, la troisième, c'est qu'on peut faire des maths en se promenant avec sa femme.

Hamilton a en fait été contraint de sortir une seconde fois des sentiers battus, et nous allons voir pourquoi. Là aussi nous allons emprunter un raccourci par rapport à la route qu'il a réellement suivi. Résumons ce que nous avons et ce que nous cherchons. On considère des nombres appelés « quaternions », pouvant s'écrire, de façon unique, sous la forme

$$q = a + bi + cj + dk \quad (12)$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, i est le nombre imaginaire bien connu, j et k sont des nouveaux nombres, et $ij = k$.

L'addition de deux quaternions et la multiplication d'un quaternion par un réel se font de façon évidente, et nous n'insistons pas sur ce point. Il nous faut cependant définir la multiplication de deux quaternions. Nous voulons que la multiplication des quaternions prolonge celle des complexes (donc si deux quaternions sont dans \mathbb{C} , on sait déjà comment les multiplier), et nous voulons également que la multiplication possède les propriétés habituelles de cette opération.

Comme $k = ij$, on peut utiliser la *distributivité* de la multiplication sur l'addition pour factoriser par j dans (12) et obtenir

$$q = w + zj \quad (13)$$

avec $w = a + bi$ et $z = c + di$ deux complexes quelconques. Tout quaternion peut s'écrire sous la forme (13), et en particulier le produit j^2 . Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que :

$$j^2 = \alpha + \beta j \quad (14)$$

Mais ceci implique que $j^2 - \beta j - \alpha = 0$. Autrement dit, le quaternion j est solution de l'équation

$$x^2 - \beta x - \alpha = 0 \quad (15)$$

Mais minute ! Cette équation est une équation du second degré à coefficients complexes. Nous savons que ses solutions sont des nombres complexes. Mais j ne peut pas être un nombre complexe, ça ne va pas ! Devons-nous conclure qu'il n'existe pas de quaternion et que Hamilton s'est trompé ? Non, car en réalité nous devons être beaucoup plus précis dans ce que nous entendons par « propriétés habituelles de la multiplication ». Il y a la distributivité, l'associativité et la commutativité. Or pour résoudre l'équation (15) par mise sous forme canonique, nous avons subrepticement utilisé ces trois propriétés. Le seul espoir qu'il nous reste pour définir une multiplication entre quaternions consiste donc à abandonner l'une au moins de ces trois propriétés. Il se trouve que cela fonctionne en supprimant la commutativité. Hamilton a compris qu'il fallait poser

$$\begin{aligned} ij = -ji = k; \quad jk = -kj = i; \quad ki = -ik = j \\ i^2 = -1; \quad j^2 = -1; \quad k^2 = -1 \end{aligned} \quad (16)$$

Pour passer des nombres complexes aux quaternions, Hamilton a donc dû faire deux sauts conceptuels importants : passer à quatre dimensions et abandonner la commutativité de la multiplication. Son audace a

ouvert la voie à de nombreuses avancées en algèbre. Tout d'abord, l'exploration des dimensions supérieures à 3 a détaché la géométrie de l'intuition physique et a permis l'essor de la géométrie vectorielle. L'étude de telles structures abstraites de vecteurs, appelés *espaces vectoriels* est au programme de cette année. La découverte des quaternions a également stimulé l'étude des *anneaux non commutatifs*. Il s'agit d'ensembles munis d'une loi d'addition et d'une loi de multiplication, soumises aux propriétés habituelles à l'exception de la commutativité de la multiplication. L'ensemble des quaternions fut le premier exemple d'anneau non commutatif, mais il en existe d'autres, et nous aurons cette année l'occasion d'étudier *l'anneau des matrices carrées*. Les matrices sont des tableaux de nombres réels ou complexes qui jouent un rôle extrêmement important dans toutes les applications des mathématiques, en particulier dans les sciences de l'ingénieur. Enfin, la multiplication des quaternions a permis de définir le *produit scalaire* et le *produit vectoriel* de deux vecteurs de l'espace à 3 dimensions. En effet, un quaternion $q = a + xi + yj + zk$ peut s'écrire sous la forme $q = a + V$, où l'on identifie $V = xi + yj + zk$ avec le vecteur de coordonnées (x, y, z) dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. On dit que a est la partie scalaire (ou réelle) de q , et V la partie vectorielle (ou pure). Si l'on prend deux quaternions « purs » $V = xi + yj + zk$ et $V' = x'i + y'j + z'k$, associés à des vecteurs \vec{v} et \vec{v}' , respectivement, on voit facilement que

$$VV' = -(xx' + yy' + zz') + P(VV') \quad (17)$$

où l'on a noté $P(VV')$ la partie pure du produit VV' . On remarque que la partie réelle de VV' n'est autre que l'opposé du produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{v}'$, et il se trouve que la partie pure définit un autre produit, appelé produit vectoriel et noté $\vec{v} \wedge \vec{v}'$. Nous étudierons le produit vectoriel cette année, mais nous ne le définirons pas de cette façon.

Exercice 4.1 Démontrer (17) et trouver la formule pour $P(VV')$.

À vrai dire, ce sont les physiciens Heaviside et Gibbs qui ont défini les produits scalaires et vectoriels afin de simplifier les calculs avec les quaternions. Ces derniers sont d'ailleurs tombés peu à peu en désuétude. Alors les quaternions ne sont-ils pas qu'un simple jeu d'écriture inventé par Hamilton, qu'on peut parfaitement contourner à l'aide des produits vectoriels et scalaires, c'est-à-dire sans sortir de la dimension 3? Ceci ne plaide-t-il pas contre l'existence des objets mathématiques? Non, et ceci pour deux raisons.

Pour comprendre la première, rappelons-nous que nous avons vu plus haut que l'ensemble \mathbb{H} des quaternions est un anneau. Mais en fait, c'est un peu plus que cela. Lorsque tout élément $x \neq 0$ d'un anneau A possède un inverse x^{-1} , tel que $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$, on dit que A est un *corps*. Par exemple \mathbb{Q} , \mathbb{R} et \mathbb{C} sont des corps. Mais il se trouve que \mathbb{H} est aussi un corps. On sait que si z est un nombre complexe non nul, la formule $z\bar{z} = |z|^2$ permet de calculer l'inverse de z comme étant $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$. Il se trouve que cette technique se généralise immédiatement aux quaternions.

Exercice 4.2 Montrer que si le quaternion $q = a + bi + cj + dk$ est non nul, alors

$$q^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}(a - bi - cj - dk)$$

est l'inverse de q .

On peut remarquer que l'on connaît maintenant trois corps inclus les uns dans les autres : $\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}$. Comme tout nombre complexe s'écrit de façon unique à l'aide de deux nombres réels, on dit que \mathbb{C} est de dimension 2 sur \mathbb{R} . On peut comprendre ceci géométriquement en se souvenant qu'on peut représenter \mathbb{C} par un plan, c'est-à-dire quelque chose qui est en 2 dimensions. Comme tout quaternion s'écrit de façon unique à l'aide de 4 réels, on dit que \mathbb{H} est de dimension 4, et ce que nous avons dit à propos des trinions montre qu'il n'y a pas de corps de dimension 3. En fait, on peut montrer qu'il n'y a pas non plus de corps de dimension 5, 6, ou n'importe quel autre nombre entier, et que \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{H} sont les seuls corps ayant pour dimension respective 1, 2 et 4. Vous voyez qu'on peut faire des mathématiques un peu comme on fait de la botanique : en cherchant toutes les espèces d'objets possédant un caractère commun. De ce point de vue, \mathbb{R} , \mathbb{C} et \mathbb{H} apparaissent comme des espèces très rares de plantes, possédant des propriétés remarquables. À ce titre il me semble que l'objet \mathbb{H} se singularise de lui-même, sans aucun arbitraire, et qu'on ne devrait pas lui reconnaître moins de réalité qu'à l'edelweiss ou la tulipe.

Peut-être même pourrait-on lui en reconnaître plus, car on peut très bien imaginer un monde sans tulipe, alors qu'on ne peut pas imaginer un monde sans quaternion. Cela vous fait peut-être l'effet d'une boutade, mais ça n'en est pas une, et il s'agit de la seconde raison que j'ai annoncée plus haut, et du dernier argument de cette introduction platonicienne. Il se trouve que les quaternions jouent vis-à-vis des rotations de l'espace un rôle similaire à celui que joue les complexes pour les rotations du plan. Vous vous souvenez sans doute que la multiplication par le nombre complexe $e^{i\theta}$ s'interprète géométriquement comme une rotation de centre O et d'angle θ dans le sens direct. À toute rotation du plan on peut associer ainsi un et un seul nombre complexe défini par l'angle de la rotation⁴. Sans rentrer dans les détails, disons qu'à toute rotation de l'espace on peut associer exactement deux quaternions opposés l'un de l'autre. Cela serait beaucoup trop long à expliquer ici, alors je vais vous demander de me croire sur parole, mais le fait qu'il y ait deux quaternions par rotation et pas un seul permet à certaines particules élémentaires, comme l'électron, de posséder un spin égal à $1/2$. Grossièrement dit, cela signifie que ces particules ne se retrouvent pas exactement dans le même état si on les fait tourner de 360 degrés autour d'un axe⁵. Il faut les tourner de 720 degrés pour retrouver exactement la situation de départ. Cette propriété ne peut pas s'expliquer par la physique classique : c'est un phénomène qui appartient à la mécanique quantique. Pour le décrire, les physiciens utilisent d'ailleurs des objets, qu'on appelle les matrices de spin de Pauli, σ_x , σ_y et σ_z , qui sont (à un facteur près) exactement les quaternions i , j et k ! Ainsi, même si Hamilton n'avait pas eu son idée de génie le 16 octobre 1843, les mathématiciens auraient été *obligés* de finir par trouver les quaternions.

5 Solution des exercices

 *Solution de l'exercice 2.1 :*

On trouve $\Delta = -18i$. On cherche $\omega = a + bi$ tel que $\omega^2 = \Delta$. On trouve le système :


$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\omega^2) &= a^2 - b^2 &= 0 \\ \operatorname{Im}(\omega^2) &= 2ab &= -18 \\ |\omega^2| &= a^2 + b^2 &= 18 \end{cases}$$

d'où $a^2 = 9$ et $b^2 = 9$. Comme ab est négatif on trouve que soit $a = 3$ et $b = -3$, soit $a = -3$ et $b = 3$. On peut donc poser $\omega = 3 - 3i$, et on trouve les solutions de l'équation qui sont

$$\frac{-(1+i) + (3-3i)}{2} = 1 - 2i \text{ et } \frac{-(1+i) - (3-3i)}{2} = -2 + i$$

 *Solution de l'exercice 4.1 :*

On trouve $P(VV') = (yz' - y'z)i + (zx' - z'x)j + (xy' - x'y)k$.

 *Solution de l'exercice :*

On a, en utilisant la formule de l'exercice 4.1 :

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + (cd - cd)i + (bd - bd)j + (bc - bc)k$$

D'où le résultat en divisant de chaque côté par le réel non nul $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

Références

- [1] J.P. Changeux, A. Connes, *Matière à pensée*, Odile Jacob

4. Le centre de la rotation ne joue pas de rôle ici.

5. Plus précisément, le vecteur qui décrit cet état change de signe.