Exercice 1

Bien que ce ne soit pas demandé, des explications, des démonstrations (pour justifier les réponses "vrai") ou des contre-exemples (pour justifier les réponses "faux") sont donnés ci-dessous.

1. Thème : exponentielle.

   a. L'affirmation est **fausse**.

   En effet, il existe des réels a et b tels que : $\left(\mathbf{e}^a\right)^b \neq \mathbf{e}^{\left(a^b\right)}$

   Par exemple $a = 1$ et $b = 2$, on a : $\left(\mathbf{e}^a\right)^b = \mathbf{e}^2$ et $\mathbf{e}^{\left(a^b\right)} = \mathbf{e}$

   La formule correcte est, pour tous réels a et b :

   $$\left(\mathbf{e}^a\right)^b = \mathbf{e}^{ab}$$

   b. L'affirmation est **vraie**.

   Pour la prouver, on peut par exemple considérer, pour tout réel u fixé, la fonction g_u définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $$g_u(x) = \frac{\exp(u+x)}{\exp(u)}$$

   La fonction g_u est dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque la fonction exponentielle l'est) et pour tout réel x, on a :

   $$g_u'(x) = \frac{\exp(u+x)}{\exp(u)} = g_u(x)$$

   En outre $g_u(0) = 1$, donc la fonction g_u est solution du problème différentiel $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$, c'est donc la fonction exponentielle. Pour tout réel x, on a donc :

   $$\frac{\exp(u+x)}{\exp(u)} = \exp(x)$$

   En particulier pour $x = v$, il vient : $\exp(u + v) = \exp(u) \times \exp(v)$

   On en déduit que pour tous réels a et b :

   $$\exp(a - b) \times \exp(b) = \exp(a - b + b) = \exp(a)$$

   D'où : $$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$$

   C'est-à-dire : $$\mathbf{e}^{a-b} = \frac{\mathbf{e}^a}{\mathbf{e}^b}$$

   c. L'affirmation est **fausse**.

   En effet, l'équation de la tangente à une courbe C d'une fonction dérivable f au point A d'abscisse x_A est donnée par : $$y = f(x_A) + f'(x_A)(x - x_A)$$

   Avec $f = \exp$ et $x_A = 1$, cela donne : $y = \exp(1) + \exp'(1)(x - 1)$

   $$y = \mathbf{e} + \mathbf{e}(x - 1) = \mathbf{e}x$$

   La droite d'équation $y = x + 1$ est en fait la tangente à la courbe de la fonction exponentielle au point d'abscisse 0.

2. Thème : continuité et dérivabilité.

   a. L'affirmation est **vraie**.

   En effet, si f est dérivable en a alors il existe un réel ℓ tel que :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \ell$$

   Posons, pour $h \neq 0$: $$\varphi(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \ell$$

   Par hypothèse, on a ainsi : $$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

   De plus : $$h\varphi(h) = f(a+h) - f(a) - \ell h$$

   D'où : $$f(a+h) = f(a) + \ell h + h\varphi(h) \text{ où } \lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

   On en déduit que : $$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

   Ce qui signifie que f est continue en a.

   b. L'affirmation est **fausse**.

   Un contre-exemple est, par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$.

   Cette fonction f est continue en 0 puisque :

$$\lim_{h\to 0} f(h) = \lim_{h\to 0} |h| = 0 = f(0)$$

   Étudions sa dérivabilité en 0.

   Nous avons pour tout $h \neq 0$: $$\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$$

   Or, la quantité $\frac{|h|}{h}$ n'a pas de limite en 0. En effet :

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h}{h} = 1 \text{ et } \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} \frac{|h|}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}} -\frac{h}{h} = -1$$

   Donc la fonction f n'est pas dérivable en 0.

   c. L'affirmation est **vraie**.

   C'est une définition possible de la dérivabilité d'une fonction en a.

3. Thème : suites.

   a. L'affirmation est **fausse**.

   En effet la forme "$\infty - \infty$" est indéterminée et peut donc donner autre chose que 0.

   Considérons, par exemple, les suites (u_n) et (v_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = n^2 \text{ et } v_n = -n$$

   On a bien sûr, $\lim u_n = +\infty$ et $\lim v_n = -\infty$ mais cependant :

$$u_n + v_n = n^2 - n = n(n-1)$$

   D'où : $$\lim (u_n + v_n) = +\infty$$

b. L'affirmation est **vraie**.

Démonstration :

Supposons que la suite (u_n) converge vers un certain réel ℓ strictement positif (le cas $\ell < 0$ est analogue).

Alors, on peut trouver un rang N_1 tel que au delà de ce rang, tous les termes u_n sont par exemple dans l'intervalle $\left]\frac{\ell}{2};\frac{3\ell}{2}\right[$:

Il s'agit bien d'un intervalle centré en ℓ. Sa largeur est $\ell/2$.

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow \frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}$$

Et en particulier : $$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n \geqslant \frac{\ell}{2} > 0$$

Soit A un réel positif (arbitraire).

Comme la suite (v_n) diverge vers $+\infty$, on peut trouver un rang N_2 tel que au delà de ce rang, tous les termes v_n sont plus grand que $\frac{2A}{\ell}$:

On pourrait choisir A au lieu de $2A/\ell$. C'est une question d'élégance...

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow v_n \geqslant \frac{2A}{\ell}$$

Posons $N = \max\{N_1 ; N_2\}$. Ainsi, on a :

$$n \geqslant N \Rightarrow u_n \times v_n \geqslant \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell}$$

C'est-à-dire : $$n \geqslant N \Rightarrow u_n \times v_n \geqslant A$$

Ce qui signifie que la suite $(u_n \times v_n)$ diverge vers $+\infty$; elle ne converge donc pas.

Remarque : dans le cas où ℓ est un réel strictement négatif, on utilisera par exemple l'intervalle $\left]\frac{3\ell}{2};\frac{\ell}{2}\right[$ et l'inégalité $u_n \leqslant \frac{\ell}{2} < 0$. On trouve, par la même méthode que la suite $(u_n \times v_n)$ diverge vers $-\infty$.

c. L'affirmation est **vraie**.

Démonstration :

Supposons que la suite (u_n) converge vers un certain réel ℓ strictement positif (le cas $\ell < 0$ est analogue).

Alors, on peut trouver un rang N_1 tel que au delà de ce rang, tous les termes u_n sont par exemple dans l'intervalle $\left]\frac{\ell}{2};\frac{3\ell}{2}\right[$:

Il s'agit bien d'un intervalle centré en ℓ. Sa largeur est $\ell/2$.

$$n \geqslant N_1 \Rightarrow \frac{\ell}{2} \leqslant u_n \leqslant \frac{3\ell}{2}$$

Et en particulier : $$n \geqslant N_1 \Rightarrow u_n \geqslant \frac{\ell}{2} > 0$$

Soit A un réel positif (arbitraire).

Comme la suite (v_n) converge vers 0 en étant positive, on peut trouver un rang N_2 tel que au delà de ce rang, tous les termes v_n sont plus l'intervalle $\left]0;\frac{\ell}{2A}\right]$:

$$n \geqslant N_2 \Rightarrow 0 < v_n \leqslant \frac{\ell}{2A}$$

Et par décroissance de la fontion inverse sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$n \geqslant N_2 \ \Rightarrow\ \frac{1}{v_n} \geqslant \frac{2A}{\ell}$$

Posons $N = \max\{N_1 \,;\, N_2\}$. Ainsi, on a :

$$n \geqslant N \ \Rightarrow\ u_n \times \frac{1}{v_n} \ \geqslant\ \frac{\ell}{2} \times \frac{2A}{\ell}$$

C'est-à-dire : $$n \geqslant N \ \Rightarrow\ \frac{u_n}{v_n} \ \geqslant A$$

Ce qui signifie que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers $+\infty$; elle ne converge donc pas.

Remarque : dans le cas où ℓ est un réel strictement négatif, on utilisera par exemple l'intervalle $\left]\dfrac{3\ell}{2}; \dfrac{\ell}{2}\right[$ et l'inégalité $u_n \leqslant \dfrac{\ell}{2} < 0$. On trouve, par la même méthode que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers $-\infty$.

d. L'affirmation est **fausse**.

En effet, lorsque la suite (u_n) converge vers un réel ℓ non nul et que la suite (v_n) converge vers 0 (en restant par exemple positive), alors (cf question 3.c.), la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

Par exemple : $u_n = 1$ (suite constante)

$$v_n = \frac{1}{n+1}$$

Alors, on a : $$\frac{u_n}{v_n} = n + 1$$

Et on constate que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ ne converge pas.

Exercice 2

1. On a :

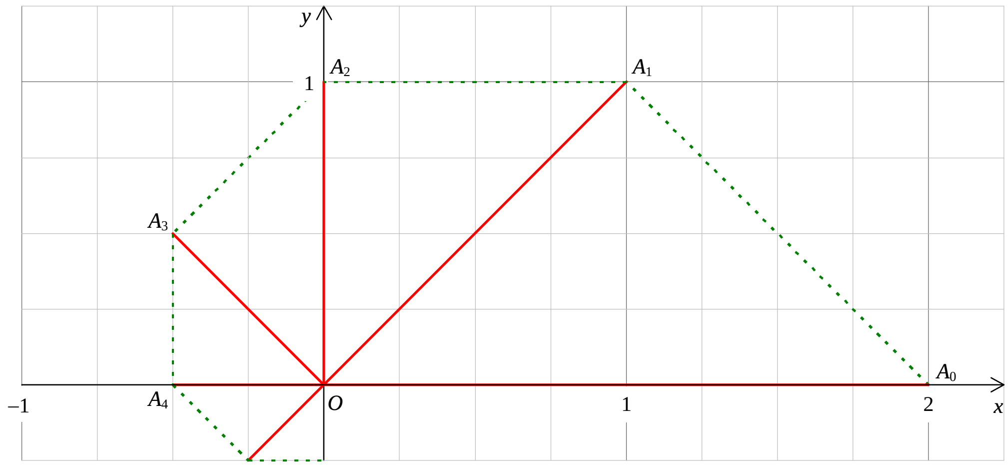
$$z_1 = \frac{1+\mathbf{i}}{2} z_0 = 1 + \mathbf{i}$$

$$z_2 = \frac{1+\mathbf{i}}{2} z_1 = \frac{(1+\mathbf{i})^2}{2} = \mathbf{i}$$

$$z_3 = \frac{1+\mathbf{i}}{2} z_2 = \frac{1+\mathbf{i}}{2}\mathbf{i} = \frac{-1+\mathbf{i}}{2}$$

$$z_4 = \frac{1+\mathbf{i}}{2} z_3 = \frac{1+\mathbf{i}}{2} \times \frac{-1+\mathbf{i}}{2} = \frac{\mathbf{i}^2 - 1^2}{4} = -\frac{1}{2} \in \mathbb{R}$$

Figure :



2. En passant au module dans la relation $z_{n+1} = \frac{1+\mathbf{i}}{2} z_n$, on obtient pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{|1+\mathbf{i}|}{2} u_n$$

Or : $$|1 + \mathbf{i}| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

D'où, pour tout entier naturel n : $$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} u_n$$

Ce qui prouve que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit une expression de u_n en fonction de n :

$$u_n = u_0 q^n$$

$$u_n = 2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

3. Comme la raison q de la suite géométrique (u_n) appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, la suite (u_n) converge donc vers 0 ; géométriquement la suite de points (A_n) converge donc vers l'origine O du repère. Les points A_n appartiennent au disque de centre O et de rayon 0,1 si et seulement si :

$$OA_n \leqslant 0{,}1$$

$$u_n \leqslant 0{,}1$$

$$2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}05$$

Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right] \leqslant \ln(0{,}05)$

D'après la relation $\ln(A^n) = n\ln(A)$ valable pour tout réel A strictement positif et tout entier naturel n :

$$n\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$-n\ln\left(\sqrt{2}\right) \leqslant -\ln(20)$$

$$n\ln\left(\sqrt{2}\right) \geqslant \ln(20)$$

Et comme $\ln\left(\sqrt{2}\right)$ est strictement positif puisque $\sqrt{2} > 1$, on a :

$$n \geqslant \frac{\ln(20)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)}$$

La calculatrice donne : $\frac{\ln(20)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} \simeq 8{,}6$ à 10^{-1} près

Et comme n est un entier naturel : $n \geqslant 9$

Les points A_n appartiennent donc au disque de centre O et de rayon 0,1 à partir de l'entier $n_0 = 9$.

4. a. Pour tout entier naturel n, on a :

$$\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{z_n}{z_{n+1}} = 1 - \frac{2}{1+\mathbf{i}} = \frac{\mathbf{i}-1}{1+\mathbf{i}} = \frac{(\mathbf{i}-1)^2}{(1+\mathbf{i})(\mathbf{i}-1)} = \frac{-2\mathbf{i}}{-2} = \mathbf{i}$$

En passant au module dans la relation précédente, on obtient :

$$\frac{A_nA_{n+1}}{OA_{n+1}} = 1$$

$$A_nA_{n+1} = OA_{n+1}$$

Ce qui prouve déjà que le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle en A_{n+1}.

Et en prenant un argument de chaque membre de la relation ci-dessus :

$$\arg\left(\frac{z_{n+1} - z_n}{z_{n+1}}\right) = \arg(\mathbf{i}) \quad [2\pi]$$

D'après les propriétés des arguments :

$$\arg(z_{n+1} - z_n) - \arg(z_{n+1}) = \arg(\mathbf{i}) \quad [2\pi]$$

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Et d'après la relation de Chasles pour les angles :

$$\left(\overrightarrow{OA_{n+1}}, \overrightarrow{A_nA_{n+1}}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{A_{n+1}O}, \overrightarrow{A_{n+1}A_n}\right) = \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$$

Ce qui prouve que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

Conclusion : le triangle OA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_{n+1}.

b. Puisque, pour tout entier naturel i, on a $A_iA_{i+1} = OA_{i+1}$, on en déduit que :

$$\ell_n = OA_1 + OA_2 + \dots + OA_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Or, la suite (u_n) étant géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la somme ℓ_n des termes d'indice 1 à n est donc

donnée par :

$$\ell_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\left(2+\sqrt{2}\right)\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$$

Comme $q \in \left]-1\,;\,1\right[$, la suite (q^n) converge vers 0. En conséquence, la suite (ℓ_n) converge vers :

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(\sqrt{2}+2) = 2 + 2\sqrt{2}$$

Exercice 3 *Spécialité*

1. L'écriture complexe de la transformation du plan f est de la forme $z' = az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, donc f est une similitude directe (ici, $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$ et $b = 1$).

   Comme $a \neq 1$, la similitude f admet donc un centre Ω dont l'affixe ω est telle que :

$$\omega = a\omega + b$$

$$\omega = \frac{b}{1-a} = \frac{2}{1-\mathbf{i}} = 1 + \mathbf{i}$$

   Son rapport k est donné par : $$k = |a| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

   Son angle θ est donné par : $$\theta = \arg(a) \quad [2\pi]$$

$$\theta = \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

   La transformation du plan f est donc la similitude directe de centre $\Omega(1 + \mathbf{i})$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

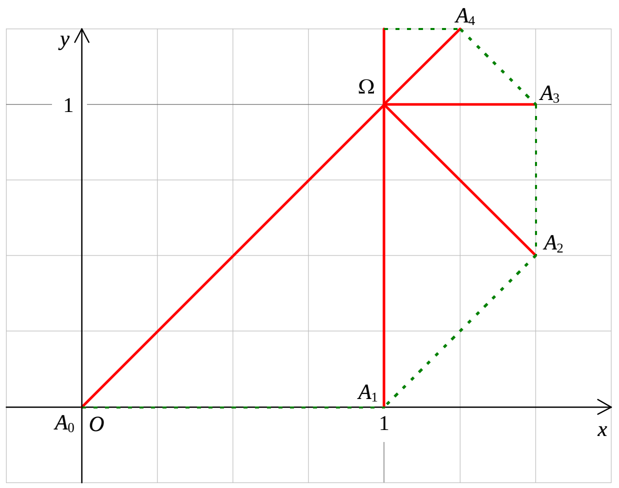
2. a. Notons, pour tout entier naturel n, z_n l'affixe du point A_n.

   On calcule : $$z_1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)z_0 + 1 = 1$$

$$z_2 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)z_1 + 1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{i}$$

$$z_3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)z_2 + 1 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}\right)\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\mathbf{i}\right) + 1 = \frac{1}{2} + \mathbf{i} + 1 = \frac{3}{2} + \mathbf{i}$$

   Figure :



   b. On a $f(\Omega) = \Omega$ et pour tout entier naturel n, $f(A_n) = A_{n+1}$. Donc la similitude f transforme le segment $[\Omega A_n]$ en le segment $[\Omega A_{n+1}]$. Et comme son rapport est $\frac{\sqrt{2}}{2}$, il vient :

$$\Omega A_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\Omega A_n$$

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\, u_n$$

Ceci étant valable pour tout entier naturel n, la suite (u_n) est donc bien géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 q^n = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$$

c. Comme la raison q de la suite géométrique (u_n) appartient à l'intervalle $]-1\,;\,1[$, la suite (u_n) converge donc vers 0 ; géométriquement la suite de points (A_n) converge donc vers le point Ω. Les points A_n appartiennent au disque de centre Ω et de rayon 0,1 si et seulement si :

$$\Omega A_n \leqslant 0{,}1$$

$$u_n \leqslant 0{,}1$$

$$\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0{,}1$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1} \leqslant 0{,}1$$

Par croissance du logarithme sur $\mathbb{R}_+^*$: $\ln\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}\right] \leqslant \ln(0{,}1)$

D'après la relation $\ln(A^N) = N\ln(A)$ valable pour tout réel A strictement positif et tout entier relatif N :

$$(n-1)\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$-(n-1)\ln\left(\sqrt{2}\right) \leqslant -\ln(10)$$

$$(n-1)\ln\left(\sqrt{2}\right) \geqslant \ln(10)$$

Et comme $\ln\left(\sqrt{2}\right)$ est strictement positif puisque $\sqrt{2} > 1$, on a :

$$n \geqslant \frac{\ln(10)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} + 1$$

La calculatrice donne : $\frac{\ln(10)}{\ln\left(\sqrt{2}\right)} + 1 \simeq 7{,}6$ à 10^{-1} près

Et comme n est un entier naturel : $n \geqslant 8$

Les points A_n appartiennent donc au disque de centre Ω et de rayon 0,1 à partir de l'entier $n_0 = 8$.

3. a. On a : $\Omega A_1 = 1$ et $A_0A_1 = 1$

Donc le triangle $\Omega A_0 A_1$ est isocèle en A_1.

Par ailleurs : $\Omega A_0^2 = 2$ et $\Omega A_1^2 + A_1A_0^2 = 1 + 1 = 2$

Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $\Omega A_0 A_1$ est rectangle en A_1.

Conclusion : le triangle $\Omega A_0 A_1$ est isocèle rectangle en A_1.

On pouvait également faire une démonstration à l'aide des nombres complexes :

On a : $\text{aff}\left(\overrightarrow{A_1A_0}\right) = z_1 - z_0 = -1 = \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{i} \times (\omega - z_1) = \mathbf{i} \times \text{aff}\left(\overrightarrow{A_1\Omega}\right)$

On en déduit par passage au module que :

$$A_1A_0 = A_1\Omega$$

Puis en prenant un argument :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{A_1A_0}\right) = \frac{\pi}{2} + \left(\vec{u}, \overrightarrow{A_1\Omega}\right) \ [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{A_1\Omega}, \vec{u}\right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{A_1A_0}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

Et d'après la relation de Chasles sur les angles :

$$\left(\overrightarrow{A_1\Omega}, \overrightarrow{A_1A_0}\right) = \frac{\pi}{2} \ [2\pi]$$

On a prouvé que le triangle ΩA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1.

Montrons maintenant par récurrence que, pour tout entier naturel n, le triangle ΩA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_{n+1}. Pour cela, on considère la propriété $\wp$ définie pour tout entier naturel n par :

$$\wp(n) : \text{le triangle } \Omega A_nA_{n+1} \text{ est isocèle rectangle en } A_{n+1}$$

- On vient de voir précédemment que le triangle ΩA_0A_1 est isocèle rectangle en A_1 d'où $\wp(0)$.
  La propriété $\wp$ est donc initialisée au rang 0.
- Supposons que, pour **un certain** entier naturel n, on ait la propriété au rang n :

  $$\wp(n) : \text{le triangle } \Omega A_nA_{n+1} \text{ est isocèle rectangle en } A_{n+1}$$

  Il suffit de remarquer que : $\Omega A_{n+1}A_{n+2} = f(\Omega A_nA_{n+1})$

  Or, nous savons qu'une similitude f transforme un triangle en un triangle de même nature d'où :

  $$\wp(n+1) : \text{le triangle } \Omega A_{n+1}A_{n+2} \text{ est isocèle rectangle en } A_{n+2}$$

  La propriété $\wp$ est donc héréditaire à partir du rang 0.

La propriété $\wp$ étant initialisée au rang 0 et héréditaire à partir du rang 0, on déduit du principe de raisonnement par récurrence qu'elle est vraie **pour tout** rang n.

Conclusion : pour tout entier naturel n, le triangle ΩA_nA_{n+1} est isocèle rectangle en A_{n+1}.

b. Puisque, pour tout entier naturel i, on a $A_iA_{i+1} = \Omega A_{i+1}$, on en déduit que :

$$\ell_n = \Omega A_1 + \Omega A_2 + \ldots + \Omega A_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

Or, la suite (u_n) étant géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{2}}{2}$, la somme ℓ_n des termes d'indice 1 à n est donc donnée par :

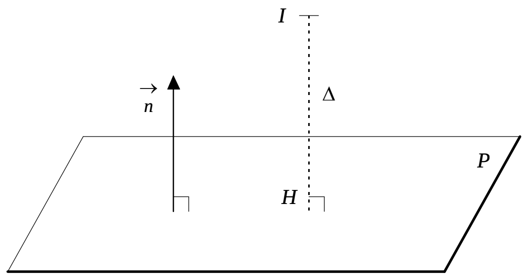
$$\ell_n = \frac{u_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{2\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)}{2-\sqrt{2}} = \left(2+\sqrt{2}\right)\left(1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n\right)$$

Comme $q \in]-1 ; 1[$, la suite (q^n) converge vers 0. En conséquence, la suite (ℓ_n) converge vers :

$$\frac{u_1}{1-q} = \frac{2}{2-\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2}$$

Exercice 3

- Partie A -



1. Soit $M(x, y, z)$ un point de la droite Δ.

   Comme $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite Δ, il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{IM} = t\,\vec{n}$$

$$\begin{cases} x - x_I = ta \\ y - y_I = tb \\ z - z_I = tc \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x = ta + x_I \\ y = tb + y_I \\ z = tc + z_I \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}$$

2. a. Comme les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{IH}$ sont colinéaires, il existe un réel k tel que :

$$\overrightarrow{IH} = k\,\vec{n}$$

   b. D'après la question 1, on a : $\begin{cases} x_H = ka + x_I \\ y_H = kb + y_I \\ z_H = kc + z_I \end{cases}$

   Mais comme H est un point du plan P, on a de plus :

$$ax_H + by_H + cz_H + d = 0$$

$$a(ka + x_I) + b(kb + y_I) + c(kx + z_I) + d = 0$$

$$k(a^2 + b^2 + c^2) + ax_I + by_I + cz_I + d = 0$$

   Et comme $a^2 + b^2 + c^2$ est non nul puisque $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$:

$$k = -\frac{ax_I + by_I + cz_I + d}{a^2 + b^2 + c^2}$$

   c. En passant à la norme dans l'égalité $\overrightarrow{IH} = k\,\vec{n}$, on obtient :

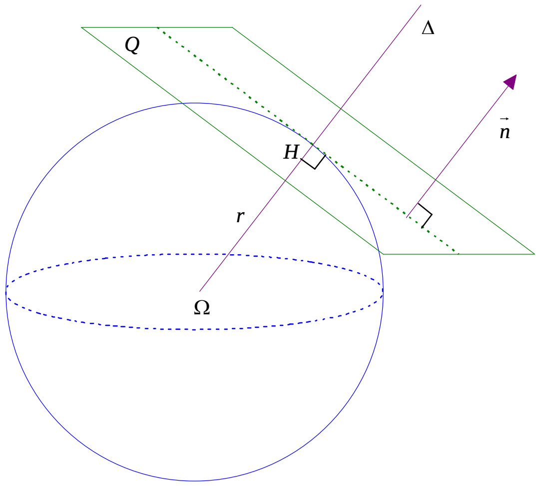
$$\| \overrightarrow{IH} \| = \|k\ \vec{n}\,\| = |k|\ \|\vec{n}\,\|$$

$$IH = |k|\ \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

   D'où : $$IH = \frac{|\,ax_I + by_I + cz_I + d\,|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- Partie B -

1. Comme le plan Q est tangent à la sphère S, leur intersection est réduite à un point H et de plus la droite $\Delta = (\Omega H)$ est orthogonale au plan Q.



Le rayon r de la sphère S est ainsi égal à la distance ΩH, ce qui d'après la partie A donne :

$$r = \Omega H = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Avec ici $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$ et $d = -11$, cela donne :

$$r = \frac{|1+1+3-11|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

2. Le vecteur $\vec{n}\,(1, -1, 1)$ est normal au plan Q.

Soit $M(x, y, z)$ un point de Δ. Comme les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{\Omega M}$ sont colinéaires, il existe un réel t tel que :

$$\overrightarrow{\Omega M} = t\,\vec{n}$$

$$\begin{cases} x - 1 = t \\ y + 1 = -t \\ z - 3 = t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 3 \end{cases}$$

3. Lorsque le point M de Δ est également situé sur le plan Q, c'est-à-dire au point noté H on a :

$$x_H - y_H + z_H - 11 = 0$$

Ce qui permet de calculer le paramètre t du point H :

$$(t + 1) - (-t - 1) + (t + 3) - 11 = 0$$

$$3t = 6$$

$$t = 2$$

D'où les coordonnées de H : $H(3, -3, 5)$

Exercice 4

- Partie A -

1. Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $]0\,;+\infty[$.

   Remarquons que si on pose $g=\ln(f)$, on aura $g'=\dfrac{f'}{f}$.

   On a les équivalences suivantes : $$f'(t)=-\frac{1}{20}f(t)\left[3-\ln\left(f(t)\right)\right]$$

   Comme f est non nulle : $$\frac{f'(t)}{f(t)}=-\frac{1}{20}\left[3-g(t)\right]$$

   $$g'(t)=\frac{1}{20}g(t)-\frac{3}{20}$$

   Ce qui démontre l'équivalence souhaitée.

2. L'équation différentielle (H) : $z'=\dfrac{1}{20}z-\dfrac{3}{20}$ est de la forme $z'=az+b$ avec $a=\dfrac{1}{20}$ et $b=-\dfrac{3}{20}$.

   Ses solutions sont donc les fonctions de la forme :

   $$t:\ \mapsto C\exp(at)-\frac{b}{a}$$

   Ce qui donne ici : $$t:\ \mapsto C\exp\left(\frac{t}{20}\right)+3$$

3. D'après la question 1, la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) si et seulement si la fonction $g=\ln(f)$ est solution de l'équation différentielle (H).

   D'après la question 2, on sait qu'il existe une constante C telle que :

   $$g(t)=C\exp\left(\frac{t}{20}\right)+3$$

   Et puisque $g=\ln(f)$: $$\ln(f(t))=C\exp\left(\frac{t}{20}\right)+3$$

   Et en prenant l'exponentielle des deux membres de l'égalité ci-dessus, il vient :

   $$f(t)=\exp\left(C\exp\left(\frac{t}{20}\right)+3\right)$$

4. D'après l'énoncé on a : $$f(0)=1$$

   (un millier d'individus en 2000, c'est-à-dire, à l'instant 0)

   $$\exp\left(C\exp(0)+3\right)=1$$

   $$C+3=0$$

   $$C=-3$$

   D'où : $$f(t)=\exp\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)$$

   (Ce calcul n'était pas demandé par l'énoncé)

   a. On a : $$\lim_{t\to+\infty}\exp\left(\frac{t}{20}\right)=+\infty$$

   D'où : $$\lim_{t\to+\infty}\left(3-3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right)=-\infty$$

Et enfin : $$\lim_{t \to +\infty} f(t) = 0$$

b. Comme la fonction f est solution, sur $]0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (E), on a pour tout t positif :

$$f'(t) = -\frac{1}{20} f(t)\left[3 - \ln\left(f(t)\right)\right]$$

Et en remplaçant $3 - \ln(f(t))$ par $3 \exp\left(\frac{t}{20}\right)$ (possible puisque $\ln(f(t)) = 3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$ d'après l'expression de $f(t)$...), on obtient :

$$f'(t) = -\frac{3}{20} f(t) \exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

Et comme la fonction f est positive sur $]0 ; +\infty[$, on en déduit que sa dérivée f' est négative sur $]0 ; +\infty[$. La fonction f est donc décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

c. Les inéquations suivantes sont équivalentes :

$$f(t) < 0{,}02$$

$$\exp\left(3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)\right) < 0{,}02$$

Par stricte croissance du logarithme sur $]0 ; +\infty[$:

$$3 - 3\exp\left(\frac{t}{20}\right) < \ln(0{,}02)$$

$$3 - \ln(0{,}02) < 3\exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

$$\frac{3 - \ln(0{,}02)}{3} < \exp\left(\frac{t}{20}\right)$$

Et toujours par stricte croissance du logarithme sur $]0 ; +\infty[$:

$$\ln\left(\frac{3 - \ln(0{,}02)}{3}\right) < \frac{t}{20}$$

$$t > 20 \ln\left(\frac{3 - \ln(0{,}02)}{3}\right)$$

La calculatrice donne $20 \ln\left(\frac{3 - \ln(0{,}02)}{3}\right) \simeq 16{,}69$ qui est positif.

D'où : $$S = \left]20 \ln\left(\frac{3 - \ln(0{,}02)}{3}\right) ; +\infty\right[$$

Selon ce modèle, la taille de l'échantillon sera inférieur à vingt individus (c'est-à-dire 0,02 milliers d'individus) pour t tel que $f(t) < 0{,}02$, ce qui d'après l'inéquation résolue ci-dessus, se produira dans 16,69 années. C'est donc au bout de **17 années** que l'on pourra affirmer que la taille de l'échantillon est inférieure à vingt individus.

- Partie B -

1. D'après l'énoncé :

- la population comporte 50% d'animaux malades donc :

$$P(M) = 0{,}5$$

- si un animal est malade, le test est positif dans 99% des cas donc :

$$P_M(T) = 0{,}99$$

- si un animal n'est pas malade, le test est positif dans 0,1% des cas donc :

$$P_{\overline{M}}(T) = 0{,}001$$

2. D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partitition $M \coprod \overline{M}$:

$$P(T) = P(T \cap M) + P(T \cap \overline{M}) = P_M(T)P(M) + P_{\overline{M}}(T)\,P(\overline{M})$$

$$P(T) = 0{,}99 \times 0{,}5 + 0{,}001 \times 0{,}5 = 0{,}4955$$

3. Le test est fiable lorsque $P_T(M)$ est supérieur à 0,999.

Or : $$P_T(M) = \frac{P(T \cap M)}{P(T)} = \frac{P_M(T)P(M)}{P(T)} = \frac{0{,}99 \times 0{,}5}{0{,}4955} \simeq 0{,}99899 \text{ à } 10^{-5} \text{ près}$$

On a donc : $$P_T(M) < 0{,}999$$

Le test n'est pas fiable (de peu).