Microéconomie Financière

TD N°2

Choix dans l'incertain : exercices d'application

1- La fameuse collection de bijoux de la Castafiore vaut 100 M€. Elle a accepté d'en prêter une partie, estimée à 19 M€ pour une exposition dont la recette sera versée à une œuvre caritative. Supposons qu'une catastrophe puisse advenir (incendie, vol…), avec une probabilité de 10%, dont la conséquence serait la destruction totale des bijoux exposés. Supposons en outre que la fonction d'utilité de la Castafiore, rationnelle au sens de VNM, est représentable par la racine carrée de la valeur de sa collection.

   a. Ecrire la richesse de la Castafiore une fois qu'elle a décidé de participer à l'exposition.
   b. Une compagnie d'assurance propose à la Castafiore le contrat suivant : la Castafiore paye une prime d'un montant X (on suppose que la Castafiore devra vendre une partie de sa collection), en échange du remboursement des bijoux exposés si la catastrophe se produit, la prime X, restant acquise à la compagnie si la catastrophe ne se produit pas. Montrer que la Castafiore est disposée à céder au plus 1,99 M€ de bijoux pour souscrire un tel contrat.
   c. Quel est le gain espéré que réalise la compagnie d'assurance dans un contrat par lequel elle s'engage à verser 19 M€ à la Castafiore avec une probabilité de 10%, et 0€ avec une probabilité de 90%, après que la Castafiore lui a payé une prime d'assurance d'un montant X ? En déduire que le gain espéré est nul si X vaut 1,9 M€. Conclure sur les conditions d'acceptabilité du contrat d'assurance.
   d. Définissez « l'aversion au risque ».
   e. Définissez « l'équivalent certain » d'une grandeur aléatoire. Montrez que l'équivalent certain de la valeur de la collection de bijoux, une fois que la Castafiore a accepté de participer à l'exposition, vaut 98,01 M€.
   f. Définissez « la prime de risque » liée à une grandeur aléatoire. Montrez que la prime de risque que la Castafiore lie à la valeur de sa collection de bijoux, une fois qu'elle a accepté de participer à l'exposition, vaut 0,09 M€.
   g. Représentez sur un schéma la fonction d'utilité de la Castafiore, l'équivalent certain de la valeur de la collection de bijoux et la prime de risque.

2- Soient 4 loteries, A, B, C et D.

   A donne 1000 €, 500 € et 0 € avec des probabilités respectives de 25%, 70% et 5%.
   B donne 1000 €, 500 € et 0 € avec des probabilités respectives de 0%, 100% et 0%.
   C donne 1000 €, 500 € et 0 € avec des probabilités respectives de 0%, 30% et 70%.
   D donne 1000 €, 500 € et 0 € avec des probabilités respectives de 25%, 0% et 75%.

Parmi les loteries A et B, laquelle préférez-vous ? Parmi les loteries C et D, laquelle préférez-vous ? Ces choix sont-ils conformes à l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern ?

3- Un individu dont les préférences sont représentées par la fonction de Cramer (racine carrée) dispose d'une richesse composée d'une partie certaine w=5 et d'une partie aléatoire X valant -4 avec une probabilité 0,2 et 4 avec une probabilité 0,8.

   a. Quel est l'équivalent certain de cette richesse pour cet individu ?
   b. A quel prix est-il disposé à vendre la partie aléatoire de sa richesse ?
   c. Quelle est la prime de risque qu'il attache à cette richesse ?

4- La richesse d'un décideur riscophobe se compose d'une partie certaine égale à 101 € et d'une partie aléatoire $\tilde{x}$ prenant les valeurs +20 € et – 20 € avec des probabilités égales (à 50%). Les préférences sont représentées par la fonction d'utilité de Cramer : E[u(x)] = E[$\sqrt{x}$]. Calculez l'équivalent certain de la richesse et la prime de risque associée à la richesse. Représentez-les sur un schéma. Combien vaut le prix de vente de la partie aléatoire de la richesse ? Vérifiez qu'un individu dont les préférences sont représentées par E[u(x)] = E[x^2] est prêt à acheter $\tilde{x}$ (défini ci-dessus) à un prix maximum de 2 €.

5- Un salarié dépourvu de patrimoine estime qu'il a une probabilité p de perdre son emploi, rémunéré au taux de salaire s. Dans ce cas, il touche une indemnité de chômage c.

   a. Représentez ses préférences par une fonction d'utilité espérée.
   b. Quelle baisse de salaire accepterait-il contre la suppression du risque de chômage ? (A.N. : u(x) = ln x ; p=0,1 ; s=2000 ; c=1000)
   c. Quel est le montant de l'indemnité de chômage en dessous duquel le salarié préfèrerait un emploi certain rémunéré au salaire t ? (A.N. : u(x) = ln x ; p=0,1 ; s=2000 ; t=1800).
   d. Les résultats précédents changent-ils si le salarié dispose d'un patrimoine w ?

6- Un décideur doit placer son patrimoine, w, en actif « risqué » dont le taux de rendement est aléatoire et vaut m avec une probabilité p et b avec une probabilité 1–p (b>m), ou en actif non risqué, dont le rendement est certain et vaut i. On note W(α) la richesse finale, avec α le montant investi en actif risqué.

   a. Ecrire le problème de décision comme un choix de loterie.
   b. A quelle condition sur i, m et b, W(α) domine-t-elle stochastiquement à l'ordre 1 W(0), pour α>0 ?
   c. Pour les fonctions d'utilité suivante, déterminer les choix de portefeuille (α optimal) : u(x) = ln(x), u(x) = x^b.
   d. Pour les mêmes fonctions d'utilité, déterminer la prime de risque attachée à la richesse W(α).

7- Etudes de fonctions d'utilité usuelles. Compléter le tableau suivant :

fonction	nom	restrictions	Aversion absolue au risque (A_A)	$\frac{dA_A}{dw}$	Aversion relative au risque (A_R)	$\frac{dA_R}{dw}$
E[ln W]	Logarithmique (Bernouilli)					
E[W–bW²]	Quadratique					
E[W^b]	Puissance (Cramer pour b=1/2)					
E[–exp(-aW)]	Exponentielle négative					
E[W] – kV[W]	Markowitz linéaire					

8- Comparer deux à deux les loteries suivantes en utilisant les concepts de dominance stochastique :

W = 0,5 o 9 & 0,5 o 11
X = 0,25 o 8 & 0,25 o 10 & 0,5 o 11
Z = 0,125 o 3 & 0,125 o 9 & 0,5 o 11 & 0,25 o 12

9- Soient deux loteries R et V :

- R rapporte 20 avec une probabilité de 60%, et x avec une probabilité de 40%.
- V rapporte 30 avec une probabilité de 50%, et x avec une probabilité de 50%.

1- On cherche ici à comparer les loteries R et V.

a. Définissez la dominance stochastique d'ordre un et la dominance stochastique d'ordre deux. En quoi ces concepts permettent-ils de classer les loteries ?
b. Représentez graphiquement les fonctions de répartition de R et de V, selon que x est inférieur à 20, compris entre 20 et 30, supérieur à 30 (faire un graphique pour chaque cas). Déduisez des graphiques que, pour tout x, R ne domine pas V stochastiquement à l'ordre un.
c. Montrez que R domine V stochastiquement à l'ordre 2 si et seulement si $x \leq -30$.
d. Pour $x = -30$, combien valent l'espérance et la variance de R et V. Commentez.

2- On suppose maintenant que $x = 0$. Les loteries correspondent aux dotations de deux personnes, disons la nourriture dont disposent Robinson et Vendredi (peu importe qu'il s'agisse de noix de coco ou de poisson). Deux « états de la nature » sont possibles : soit R=20 et V=0 (état 1), soit R=0 et V=30 (état 2). Les probabilités données dans l'énoncé sont les probabilités subjectives d'occurrence des états de la nature : elles diffèrent selon les individus (Robinson pense que l'état 1 a 60% de chances de se produire, et que l'état 2 a 40% de chance de se produire, Vendredi pense que les deux états sont équiprobables). Les deux individus peuvent conclure des contrats d'échange contingents. Les individus maximisent l'espérance du logarithme de la consommation.

a. Existe-t-il un « risque agrégé » ?
b. Déterminez l'équilibre walrasien de cette économie d'échange avec incertitude : prix relatif des biens contingents, consommations optimales dans chaque état de la nature.