LES MATHEMATIQUES ET LA NATURE

Miguel Espinoza

(1997)

1. Introduction

Cet essai est consacré à la relation entre les mathématiques et la nature suivant les différentes conceptions des mathématiques. Il est difficile de trouver une source unique aux mathématiques car leur domaine est vaste et varié, et comment vérifier les suggestions réalistes ou idéalistes concernant la nature des mathématiques, si ces doctrines sont des interprétations différentes du même ensemble de faits? Mais si on regarde les mathématiques du point de vue de l'intelligibilité de la nature, on apprécie les options réalistes dont le principal avantage consiste à nous persuader que l'adéquation réciproque de la nature et des mathématiques, leur résonance, leur mutuelle constitution évidente, par exemple, dans la physique mathématique, ne sont pas des mystères insondables mais une situation à laquelle on pouvait s'attendre.

Il est impossible de rendre intelligible un phénomène ou une situation sans se placer à une certaine distance par rapport à eux. Cette distance est assurée par le langage, naturel ou formel. Chaque système de symboles qui constitue un langage déterminé a son style propre de relation avec les choses et sa façon de construire des énoncés et de les transformer, c'est-à-dire sa façon d'engendrer la signification.

Le nominalisme, l'empirisme, le réalisme, etc., sont des modèles interprétatifs de l'évidence rationnelle ou de l'évidence empirique, il ne faut donc pas s'attendre à ce qu'ils soient définitivement corroborés ou réfutés par l'expérience ou par la raison. Les langages sont des systèmes complexes dont nous ne savons pas encore comment ils ont émergé; il est ainsi peu probable qu'une seule doctrine détienne la clé des rapports entre un langage et la nature. Ce qui est vrai du langage naturel n'est peut-être pas nécessairement vrai de la géométrie ou de l'analyse, ou encore de la musique ou de la peinture. Mais en philosophie il ne s'agit pas seulement de résoudre les discussions: on peut les réviser à la lumière de nouveaux événements, les réinterpréter, marquer les avantages ou les inconvénients de telle ou telle idée selon les objectifs qu'on s'est fixés. Etant donné que c'est dans le contexte de l'intelligibilité de la nature que j'aborde les doctrines et que ce problème suppose un contexte réaliste, j'indiquerai les avantages du réalisme et les inconvénients des autres philosophies.

2. Le nominalisme ou la peur d'être trompé par les mots

Il est difficile de s'inspirer des doctrines nominalistes pour étudier la nature, et on a toujours du mal à comprendre la cohérence d'esprit de savants qui, comme Stephen Hawking, adoptent une attitude nominaliste et positiviste en philosophie, tout en consacrant leur vie à l'étude de la nature. L'une des coupures nominalistes avec le réalisme aristotélicien consiste à nier que les essences ou que les espèces existent dans la réalité externe au sujet: elles se trouveraient dans l'esprit, dans le langage, d'où l'idée que la science, l'étude de l'universel immuable selon les philosophes de l'antiquité et les médiévaux, devienne principalement une question de concepts et de propositions, et secondairement une question relative aux choses. Si le langage a une relation immédiate et transparente avec lui-même, alors la certitude est possible seulement par rapport aux concepts et aux propositions, tandis que le passage aux choses est un saut dans l'incertain: il s'agit de l'un des traits principaux du nominalisme.

Une fois la priorité accordée au langage, le passage à la connaissance des choses dépendra des possibilités du langage, de sa capacité à créer la signification, de sa façon de générer des énoncés, de ses pouvoirs déductifs. L'idéalisme est inscrit dans le nominalisme: l'univers est dans le mot. Les doctrines nominalistes sont sceptiques et timorées. Le nominaliste n'est pas sûr d'avoir touché la réalité et il a peur d'être dupe et désorienté par le langage. Cette peur a été héritée par les philosophes analytiques qui ne se lassent pas de bricoler avec le langage, ils n'ont pas le goût du risque intellectuel. Au contraire, les réalistes sont des gens que les obstacles pour arriver au réel n'arrêtent pas facilement.

L'une des questions principales auxquelles doit répondre la philosophie mathématique est la suivante: comment pouvons-nous expliquer que les mathématiques s'appliquent à la nature? Un nominaliste, Hartry Field, répond qu'on ne peut exiger des mathématiques que la consistance, non la vérité. La théorie mathématique doit être une extension conservatrice de la théorie physique, c'est-à-dire que toute proposition de la théorie physique prouvée à l'aide des mathématiques peut être prouvée sans elles. Si l'on répondait que les mathématiques sont vraies parce qu'elles sont un corps de propositions dérivées d'un ensemble d'axiomes, H. Field dirait à son tour qu'il n'y a pas de raison de décrire les axiomes comme vrais: ce sont des fictions.

D'après H. Field, l'explication valable en science est l'explication intrinsèque; elle est composée d'éléments indispensables qui sont ceux susceptibles d'entretenir des relations causales. Par exemple, les électrons, éléments théoriques de la physique, sont causalement pertinents. Par contre, les nombres, entités idéales, ne peuvent entretenir des relations causales avec les entités physiques: ce sont donc des éléments non indispensables formant des explications extrinsèques. Selon H. Field, la science sans nombres est possible, mais il ajoute que cela ne veut pas dire que le savant doive s'interdire d'utiliser les mathématiques: elles permettent l'élaboration de preuves courtes et simples. Nous sommes loin de Platon qui trouve les nombres divins car là où il n'y en a pas il n'y a rien, sauf désordre et confusion, et qui pense que sans la connaissance des nombres nous serions dépourvus d'intelligence et même de morale.

La partie des mathématiques sans référence aux entités abstraites et dont le rôle spécifique est la transmission de la vérité, est la logique, ce qui évidemment n'est pas méconnu de H. Field, mais sa croyance que toute mathématique appliquée est réductible à l'appareil déductif est, à mon avis, déraisonnable.[1] Dans l'explication, il importe de distinguer l'indispensable du non indispensable, ce qui existe de ce qui n'existe pas. Dans la mesure où le nominalisme est une contribution à cette recherche, c'est un programme pertinent. De plus, H. Field a raison de dire que le problème principal de la philosophie des mathématiques consiste à rendre compte de leur application à l'univers physique. Pour les réalistes, tel Aristote, les mathématiques sont vraies si elles s'appliquent

[1] Cf. Hartry Field, *Science without numbers,* Basil Blackwell, Oxford, 1980.

adéquatement à la réalité.[2] Les conventionalistes, tel Poincaré, n'y voient autre chose qu'une commodité.[3] Ils soulignent, par exemple, que notre perception de la nature n'est pas assez fine pour décider, étant donné plusieurs structures géométriques possibles, laquelle est vraie.

Qui veut montrer exhaustivement que les mathématiques des sciences peuvent être remplacées par la logique a du travail pour longtemps. Considérez que la presque totalité des théories mathématiques a trouvé une application et les exceptions se comptent sur les doigts d'une main. Selon Jean Dieudonné, parmi les rares exceptions, on signale la théorie des catégories et l'algèbre commutative.[4] Puis il y a des concepts mathématisés: dans la physique mathématique, les mathématiques ne sont pas un langage externe; sans elles, les idées, dans cette discipline, n'existent pas car les mathématiques y jouent un rôle constitutif, elles sont engagées. Quelles sont les chances de réussite du programme nominaliste dans les théories mathématisées? L'ontologie qui sert de support à l'univers du discours de la logique doit accueillir beaucoup d'entités, ce qui serait finalement incompatible avec le paysage désertique envisagé par les logiciens. A moins de proposer que non seulement les mathématiques, mais également la physique, soit une fiction. De toute évidence, telle n'est pas l'intention de H. Field.

H. Field prend comme critère d'existence les quanteurs: qu'est-ce qui doit exister pour que les énoncés mathématiques soient vrais? Un meilleur critère est celui d'Aristote: considérez de quelle façon les mathématiques sont une abstraction de l'univers physique et pourquoi elles s'y appliquent. Réponse du Philosophe: le mathématicien, comme le physicien, étudie l'univers physique mais non en tant que physique. Le mathématicien (il n’est pas seul à faire des abstractions) sépare avec la pensée ce qui en réalité est uni. Par exemple, une fois que les entités géométriques ont été séparées des entités physiques par abstraction, les premières se libèrent des caractéristiques sensibles, de la matière, du devenir, et peuvent ainsi être une matière intelligible, les objets immuables d'une science exacte, de la « géométrie philosophique » dans les mots de Platon

---

[2] Les rapports entre les mathématiques et la nature selon Aristote sont bien étudiés dans le livre de Thomas Heath *Mathematics in Aristotle,* Oxford, 1949.

[3] Henri Poincaré, *La science et l'hypothèse,* rééd. Flammarion, Paris, 1968, p. 76.

[4] Cf. Jean Dieudonné, *Panorama des mathématiques pures,* Gauthier-Villars, Paris, 1979.

(resp. la « géométrie populaire »).[5] Les entités idéales séparées par l'abstraction peuvent ensuite se développer et aller très loin des entités physiques grâce au pouvoir des mathématiques de générer des idées, de faire des abstractions d'abstractions, etc. Les abstractions mathématiques se distinguent des abstractions de toutes les autres sciences en ce que les premières sont complètes : pour les étudier et pour avancer on n'a plus besoin de retourner à la source sensible. Les mathématiques s'appliquent à l'univers physique parce qu'elles y trouvent leur source première.

Cette dernière idée ne se rencontre ni chez les nominalistes ni chez les fictionnistes pour qui les entités mathématiques sont des fictions, utiles pour la représentation de la nature ou pour le développement des mathématiques. Mario Bunge dit que les formules mathématiques ne sont compromises avec aucune réalité en particulier. L'irréalité des entités mathématiques serait prouvée par l'absence de relation biunivoque entre les entités mathématiques et les phénomènes physiques. L'équation différentielle "dy/dt = ky" ou l'équation de la droite reçoivent une multiplicité d'interprétations. Voilà donc une conséquence ontologique du nominalisme: les mathématiques sont des fictions. Aucun espoir de connaître la réalité naturelle en examinant les structures formelles ou les pouvoirs génératifs des mathématiques.[6]

Pour sa part le réaliste dira que la multiplicité d'interprétations des équations montre que les analogies naturelles, les ressemblances, existent, autant de caractéristiques qui, comme la causalité et la symétrie, rendent la pensée possible. « L'originalité des mathématiques, écrit A. N. Whitehead, tient au fait que cette science permet d'établir des relations entre les choses qui, en dehors de l'activité de la raison humaine, ne sont nullement évidentes ».[7] Mais le fictionniste cohérent, comme M. Bunge, répondrait que l'explication par analogie est fictive. Une chose est certaine: le fictionnisme en mathématiques exige le fictionnisme en physique. Le contenu de la physique mathématique est la nature et cette science augmente la connaissance par approximation: elle expose une réalité idéale approchée par la réalité naturelle. On peut se demander comment la

---

[5] Cf. Anders Wedberg, *Plato's Philosophy of Mathematics,* Almquist & Wiksell, Stocholm, 1955.

[6] Cf. Mario Bunge, *Treatise on Basic Philosophy,* Vol. 7, 1ère Partie, Reidel, 1985.

[7] A. N. Whitehead, *Science and the Modern World,* éd. The Free Press, N. Y., 1967, p. 19.

connaissance par approximation serait possible si ces deux réalités, mathématique et naturelle, ne partageaient pas les mêmes structures.[8]

Il est clair que par rapport à l'essence des mathématiques et à ses pouvoirs pour connaître la nature, le nominalisme est une doctrine sceptique et négative.

3. Le conventionnalisme: la nature n'a pas toujours de réponse ou de réponse unique à nos questions

La découverte des géométries non-euclidiennes et les résultats des sciences de la vie telles que la théorie de l'évolution, la physiologie et la psychologie de la perception, ont persuadé les philosophes et les savants contemporains de Poincaré du mal fondé de l'apriorisme kantien. Y a-t-il une géométrie qui ait à la fois un sens mathématique et physique, valable pour toutes les régions de l'univers? Avant la découverte des géométries non-euclidiennes on répondait par l'affirmative, et l'avis de Kant était que la nécessité de l'espace euclidien avec ses trois dimensions et sa courbure nulle a comme origine la structure mentale humaine.

La multiplicité des géométries possibles peut être vue comme une multiplicité de l'*a priori*, ce qui équivaut au conventionnalisme. Du coup, il s'établit une différence entre les espaces mathématiques et l'espace physique. Gauss, Riemann, Helmholtz et d'autres mathématiciens pensent qu'il est impossible de fixer *a priori* la géométrie de l'espace physique et que l'information doit venir de l'expérience (des observations astronomiques, des mesures géodésiques). Tandis que la plupart de ceux qui ont critiqué Kant sont devenus des empiristes, Poincaré a élaboré un nouvel ensemble d'idées, le conventionnalisme, qui inclut des éléments de l'apriorisme et de l'empirisme.

A la base du conventionnalisme géométrique est l'idée que l'espace physique est une multiplicité continue sans dimension intrinsèque et métriquement amorphe. Le nombre de dimensions et la métrique sont donc imposés extrinsèquement, et il y a plusieurs façons d'organiser l'espace: il y a place pour des éléments subjectifs, des décisions, des choix, des conventions. Supposons que nous ayons choisi d'utiliser pour mesurer une tige rigide; les

[8] Cf. Roberto Torretti, "Three kinds of mathematical fictionism", dans Agassi et Cohen, éds., *Scientific Philosophy Today,* Reidel, 1981.

mesures spatiales seront ainsi le résultat des relations entre la tige rigide et les objets, qu'on suppose rigides. La tige doit être transportée, reste-t-elle invariante? Voilà une question dont la réponse ne relève pas de l'expérience mais d'une convention. Dans des situations pareilles, on ne peut pas dire que telle ou telle géométrie soit vraie, vérifiée ou réfutée par l'expérience: une géométrie s'accommode mieux qu'une autre, s'applique mieux. (Là où le conventionnaliste voit une commodité, un réaliste comme Aristote verrait une vérité).

On comprend qu'entre les mains des savants la géométrie euclidienne ait continué de jouer un rôle privilégié. En effet la géométrie euclidienne est adéquate pour décrire les objets de la perception courante, à condition de supposer que ceux-ci sont et restent rigides. Gauss pensait que le système euclidien était plus vrai que les autres parce qu'il tenait l'observation que la courbure de notre espace est nulle pour un compte-rendu adéquat de l'expérience. De plus, il est à remarquer qu'il est probablement impossible de construire des géométries non-euclidiennes sans les concepts de base de la géométrie euclidienne.

Selon Poincaré, il y a ambiguïté dans la mise à l'épreuve des géométries physiques, situation clairement illustrée par l'argument de la parallaxe : "Si la géométrie de Lobatchevsky est vraie, la parallaxe d'une étoile très éloignée sera finie; si celle de Riemann est vraie, elle sera négative. Ce sont là des résultats qui semblent accessibles à l'expérience et on a espéré que les observations astronomiques pourraient permettre de décider entre les... géométries. Mais ce qu'on appelle ligne droite en astronomie, c'est simplement la trajectoire du rayon lumineux. Si donc, par impossible, on venait à découvrir des parallaxes négatives, ou à démontrer que toutes les parallaxes sont supérieures à une certaine limite, on aurait le choix entre deux conclusions: nous pourrions renoncer à la géométrie euclidienne ou bien modifier les lois de l'optique et admettre que la lumière ne se propage pas rigoureusement en ligne droite".[9]

Une autre source du conventionnalisme est la distinction faite par Poincaré et soulignée par Duhem entre les composants théoriques et les composants empiriques des théories; d'un côté le langage, la mathématique, de l'autre, l'expérience sensible. On comprend ainsi comment les conventionnalistes de la

---

[9] Henri Poincaré, *op. cit.,* pp. 95-96.

fin du XIX^{e} siècle ont pu précéder les empiristes logiques du XX^{e} siècle dans leurs problèmes concernant la nature des théories, car pour ces derniers, ce qui ne relève ni de l'expérience sensible ni du domaine formel ou symbolique, n'a pas de signification cognitive.

Une fois qu'on a tracé la distinction langage-expérience, on comprend qu'il soit possible pour deux théories d'être empiriquement équivalentes et pourtant de ne pas l'être théoriquement ou linguistiquement. D'où un choix à faire parmi les composants linguistiques des théories. Dans la mesure où les théories sont incommensurables (intraduisibles; logiquement et empiriquement incomparables), on peut concevoir que le projet réaliste d'élaborer *une théorie* qui soit l'explication d'*un univers* soit mal fondé. Le réaliste, par contre, ne distingue pas si nettement entre le langage et l'expérience de la nature. "Il est même impossible de parler du réel indépendamment des modes de pensée selon lesquels il se laisse appréhender, et loin de rabaisser la mathématique à n'être qu'une langue indifférente à la réalité qu'elle décrirait, le philosophe s'y engage comme dans une attitude de méditation où doivent lui apparaître les secrets de la nature". (Albert Lautman).[10]

Evidemment, Poincaré serait plus près d'être d'accord avec l'idée de Lautman que les autres conventionnalistes plus radicaux que lui. Récemment, J. Giedymin a essayé de dégager la spécificité des opinions de Poincaré. On ne peut pas les confondre avec celles de LeRoy, Duhem ou Ajdukiewicz.[11] Selon le nominalisme idéaliste de LeRoy, les faits absolus n'existent pas, les faits sont construits par l'activité scientifique; nous n'avons pas accès à la réalité qui est médiatisée par nos caractéristiques en tant qu'individus et en tant qu'espèce animale. Le découpage de la nature exprime les caractéristiques de nos corps. Les lois sont également des constructions de nos esprits; elles reflètent les caractéristiques de notre discours plutôt que celles de la nature. Les théories sont des règles de grammaire.

Poincaré a soutenu une position beaucoup plus objectiviste. Il n'est pas idéaliste. Il croit qu'il y a des faits connus imposés aux scientifiques à travers les

[10] Albert Lautman, *Essai sur l'unité des mathématiques,* Union Générale d'Editions, éd. 1977, pp. 284-285.
[11] Cf. Jerzy Giedymin, *Science and Convention. Essays on H. Poincaré's Philosophy of Science and the Conventionalist Tradition,* Pergamon, Oxford, 1982.

sens et indépendants de la volonté. Pour les décrire et les expliquer, les savants doivent se mettre d'accord sur quelques conventions. Il n'est pas toujours facile de distinguer les éléments réels des éléments conventionnels d'une loi ou d'une théorie, mais les deux sont là. Comment ne pas être d'accord avec Poincaré sur ce point? Les théories reflètent la nature plutôt que notre façon de voir; elles ne sont pas seulement des recettes pratiques. Malgré les changements théoriques, il y a des équations qui restent vraies (par exemple le passage de Fresnel à Maxwell), et si les équations restent vraies, c'est que les rapports décrits sont réels. Les composants invariables des théories sont leurs propriétés non-conventionnelles. Selon Poincaré, les éléments réels sont inconnus, mais leurs relations réelles sont saisies par les équations qui subsistent d'une théorie à une autre.[12] On ne peut donc pas associer Poincaré à LeRoy ni à Ajdukiewicz. Ce dernier, comme les empiristes logiques récents, a adopté un conventionnalisme radical et a essayé d'étudier de plus près les aspects linguistiques des théories (nature de la signification, des règles du langage, de la traduction, etc.), des questions sur lesquelles ni Poincaré ni Duhem n'ont considéré utile de s'attarder.

Les étiquettes sont souvent inopportunes car les problèmes des philosophes ne sont jamais simples. Par exemple, rien n'empêchait Poincaré d'être kantien en arithmétique car il croyait que les axiomes et en particulier le principe d'induction mathématique étaient des vérités synthétiques *a priori*; non-kantien dans la philosophie de l'espace, en géométrie et en physique; semi-empiriste et semi-conventionnaliste en physique; conventionnaliste en géométrie. Il faut retenir que Poincaré voulait comprendre la nature, l'étude des caractéristiques du sujet de la connaissance étant asservie à la philosophie de la nature.

La physique mathématique est le résultat d'un compromis entre un système mathématique simple doté d'un bon pouvoir génératif, et des données empiriques aussi exactes que possible. Dans la mesure où ces composants progressent, la partie conventionnelle, inconfortablement située entre les deux, se réduit. Le destin du conventionnalisme est triste car il est voué à reculer.

---

[12] H. Poincaré, *La valeur de la science,* Flammarion, Paris, 1920, pp. 267 et s.

4. L'empirisme: les mathématiques sont-elles une science d'observation?

J'ai déjà mentionné l'une des questions importantes auxquelles doivent répondre la philosophie de la nature et la philosophie mathématique: Comment pouvons-nous expliquer que les mathématiques s'appliquent à la nature? Un autre problème consiste à expliquer la connaissance propre à cette science caractérisée par l'exactitude dans la formation des concepts, la rigueur dans les inférences, l'air définitif des vérités. C'est la raison pour laquelle Platon avait cru devoir distinguer la mathématique populaire basée sur l'expérience sensible et capable d'une vérité approximative seulement, de la mathématique philosophique fondée sur les Formes Mathématiques et exacte. D'autres réalistes en philosophie mathématique, tels Frege et le Husserl des *Recherches logiques,* ont également insisté sur le fait que l'existence d'un domaine objectif, idéal, était la condition de possibilité de la connaissance en mathématiques. Ce domaine est la réalité mathématique qu'on observe et qu'on découvre.

Les mathématiciens réalistes aiment comparer le domaine mathématique à celui de la physique: les objets, leurs propriétés et leurs rapports sont là et nous ne pouvons pas leur attribuer des caractères arbitraires. N. Bourbaki[13] est d'avis que cette vision est au moins partiellement motivée par des réactions d'ordre psychologique: tout mathématicien qui fait des efforts pour élaborer une démonstration sans réussir, ou sans réussir facilement, a l'impression de se heurter à des obstacles objectifs opposés par le monde externe. « Je crois que la réalité mathématique se trouve en dehors de nous, écrit G. H. Hardy, que notre rôle est de la découvrir ou de l'observer, et que les théorèmes que nous prouvons, et qui nous décrivons d'une façon grandiloquente comme étant nos propres créations, sont tout simplement nos comptes rendus de nos observations ».[14]

L'empirisme en mathématiques est la thèse que les concepts et les propositions mathématiques, les vérités, les axiomes, ont leur source dans l'intuition sensible ; ils sont des généralisations de l'expérience obtenues par induction. D'après J. S. Mill, « Puisque, donc, il n'y a dans la nature ni dans l'esprit humain aucun objet exactement conforme aux définitions de la géométrie,

---

[13] Cf. N. Bourbaki, *Eléments d'histoire des mathématiques,* Hermann, Paris, 1969, chap. 1, "Fondements des mathématiques".

[14] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, Cambridge U. P., 1940, éd. 1967, pp. 123-124.

et que, d'ailleurs, on ne peut admettre que cette science ait pour objet des non-entités, il ne reste qu'une chose à dire, c'est que la géométrie a pour objet les lignes, les angles et les figures tels qu'ils existent ; et que les définitions doivent être considérées comme nos premières et nos plus évidentes généralisations relatives à ces objets naturels. Ces généralisations, en tant que généralisations, sont parfaitement exactes ».[15] Et Enriques écrit : « D'un point de vue synthétique, les considérations précédentes sur l'acquisition des concepts géométriques mettent en lumière la variété des expériences élémentaires et inconsciemment répétées, qui sont évoquées de nouveau dans la vision imaginative ou intuitive de l'espace. Mais, mieux encore, elles nous montrent le long processus d'abstraction et d'association par lequel les concepts eux-mêmes furent engendrés ».[16] De ce point de vue, c'est l'expérience qui est exacte et les propositions mathématiques sont des comptes-rendus approchés, des hypothèses comme celles de toute science naturelle, vérifiables jusqu'à un certain point ; les propositions mathématiques sont des anticipations des résultats d'autres expériences qui ne pourront jamais être définitivement prouvées. En tant que propositions hypothétiques, elles peuvent être contredites (par exemple, il y a des hypothèses euclidiennes et des hypothèses non-euclidiennes sur les mêmes faits). Einstein est d'accord avec ce point de vue. Ne voulant pas réduire la géométrie à une pure axiomatique sans portée physique, il dit que la géométrie, complétée par des propositions convenablement choisies, « est manifestement une science dérivée de l'expérience ; nous pouvons même la considérer comme la branche la plus ancienne de la physique… la question de savoir si la géométrie pratique du monde est euclidienne ou non, a un sens précis et la réponse ne peut être fournie que par l'expérience ».[17]

L'empirisme en mathématiques a été récemment exposé et défendu par Philip Kitcher. Pour lui, il n'y a pas de frontière stricte entre les mathématiques et les sciences de la nature. Dans ces deux domaines, la connaissance est conditionnée par l'évidence empirique et le travail accompli par les générations précédentes.[18] L'empirisme se construit en grande partie en opposition aux thèses

[15] John Stuart Mill, *Système de logique*, éd. Mardaga, Liège, 1988, pp. 256-257.
[16] Federigo Enriques, *Les concepts fondamentaux de la science*, Flammarion, Paris, 1919, pp. 82-83.
[17] Albert Einstein, "La géométrie et l'expérience", in *Réflexions sur l'électroddynamique, l'éther, la géométrie et la relativité*, Gauthier-Villars, Paris, 1972, p. 78.
[18] Cf. Philip Kitcher, *The Nature of Mathematical Knowledge,* Oxford U. P., 1983.

aprioristes. L'aprioriste pense que tous les énoncés connus en mathématiques peuvent être connus *a priori* en suivant des preuves. W. V. Quine a argumenté éloquemment contre la soi-disant clarté de l'idée d'analyticité, qui est une version de l'apriorisme.[19] (Les logiciens ne sont pas d'accord quant aux caractères de la relation entre l'*a priori* et l'analytique; il est donc difficile de savoir dans quels cas les arguments contre l'analytique s'appliquent à l'*a priori*).[20] La stratégie de Quine a été de montrer que la compréhension de l'idée d'analyticité est circulaire: on a essayé de définir l'analytique en faisant appel à la notion de signification *(meaning),* qui à son tour est compréhensible en fonction de la synonymie, qui présuppose l'analyticité. D'où la conclusion que la limite entre l'analytique et le synthétique n'est pas tracée: c'est un dogme. Il n'existe pas de vérité mathématique non-révisable. Quine donne comme exemple la tentative de réexaminer la logique orthodoxe pour l'accommoder aux besoins de la mécanique quantique.[21]

Selon Quine, toute nécessité est naturelle: il n'y a pas besoin d'ajouter une nécessité mathématique *sui generis;* les mathématiques et la physique forment un seul corps. Les logiciens amateurs de modalités se sont demandés si le nécessaire naturel est identique au nécessaire mathématique, si le possible mathématique et le possible physique coïncident. La réponse la plus courante est que les possibilités mathématiques vont au-delà du possible naturel: le processus de construction des nombres naturels, quel que soit ce processus, peut être continué à l'infini. D'après le physicalisme de Quine, ce processus est, finalement, physique: capacité de continuer à l'infini veut dire capacité physique de continuer à l'infini. Mais comment comprendre que la notion d'infini se soit formée à partir d'un cerveau fait d'un nombre fini d'atomes; et comment savoir ce qui est physiquement possible sans faire appel à la théorie physique constituée par les mathématiques?

Kitcher a assimilé l'enseignement de Quine et ajoute d'autres doutes sur l'apriorisme. Comme Quine, il agit essentiellement comme un destructeur. L'un

---

19 Cf. W. V. Quine, "Two dogmas of empiricism" dans *From a Logical Point of View,* Harper, New York, 1953.

20 Cf. Charles Parsons, *Mathematics in Philosophy,* Cornell U. P., New York, 1983, essai 7, "Quine on the philosophy of mathematics".

21 Cf. W. V. Quine, *Philosophy of Logic,* Prentice-Hall, New Jersey, 1970, pp. 100 et s.

de ces doutes concerne le caractère a priori des énoncés qui jouent un rôle justificatif dans les preuves. Dans une démonstration on peut utiliser des théorèmes dont la preuve est très longue. Est-ce compatible de dire qu'un théorème est connu *a priori* et que sa démonstration est très longue? Peut-on être sûr qu'on n'a pas commis d'erreur? Le degré de certitude grandit à mesure que les démonstrations répétées confirment le résultat, mais peut-on jamais être sûr? Dans ce cas, les mathématiques ne diffèrent pas des sciences naturelles comme la certitude absolue *a priori* différerait d'une probabilité *a posteriori*. En parlant de justification, nous avons touché un concept cher au Kitcher épistémologue. D'après lui, c'est dans le processus de justification que le platonisme se révèle insuffisant.

Un autre doute sur l'apriorisme concerne l'intuition, cette vision immédiate et complète dont serait capable l'esprit. Par quel préjugé non examiné peut-on dicter que la vision intellectuelle est plus fiable, mieux justifiée que la vision sensible? Il est raisonnable de penser qu'intuition intellectuelle et vision sensible sont également faillibles. Il y a plusieurs géométries cohérentes et non une seule, l'euclidienne, comme le croyait Kant. Dans la perception d'une entité, comment savoir quelles sont les propriétés qui reflètent nécessairement les structures mentales? Et si les entités ne possédaient pas exactement les propriétés que nous croyons trouver en elles? Gödel parle, lui aussi, d'intuition: les axiomes sont des vérités que la réalité mathématique nous impose. Kitcher se demande si le sentiment d'évidence n'est autre qu'une familiarité acquise par l'entraînement, par l'apprentissage. Puis il y a les paradoxes. Par exemple, la théorie des ensembles nous montrerait des axiomes évidents et des paradoxes, ce qui devrait mettre en garde contre la prétendue infaillibilité de l'intuition.

Voici maintenant un doute envers le conceptualisme, forme d'apriorisme qui postule que nous possédons une connaissance a priori et fondamentale des axiomes grâce à des concepts mathématiques (Locke, Frege). Nous pouvons reprendre les arguments de Quine contre la prétendue clarté de la notion de signification dans "Deux dogmes de l'empirisme". Par exemple l'extension d'un concept ne dépend pas seulement de la signification (notion obscure d'après Quine, qu'il faut éliminer autant que possible), mais elle dépend surtout de faits contingents. Tout concept a une évolution. D'autres (relativistes ou anarchistes) iront jusqu'à affirmer que les concepts changent radicalement au point de devenir incommensurables. On voit là l'influence indéniable de l'expérience, ce qui enlève aux mathématiques leur caractère incorrigible ou *a priori*. En mathématiques, comme dans les autres sciences de la nature, le changement de signification existe et ce qui à un moment donné est présenté comme justification d'un énoncé se révèle plus tard insuffisant, comme résultat du processus d'approfondissement et de généralisation. (Que l'on pense, par exemple, aux corrections de la conjecture d'Euler, minutieusement étudiées par Imre Lakatos dans *Preuves et réfutations).*

Quelles sont les entités qui peuplent la réalité mathématique? Quelle est, par exemple, la référence de la figure "2"? Il n'a pas échappé aux conventionnalistes ni aux empiristes qu'il y a plusieurs façons de réduire l'arithmétique à la théorie des ensembles. La référence de "2" pourrait être {{Ø}} aussi bien que {Ø,{Ø}}. Ainsi, le platonicien est partagé entre accepter que les nombres sont des ensembles et la difficulté à dire quels sont ces ensembles.

Les critiques précédentes avancées par Kitcher ont le mérite de montrer ce que le platonicien doit améliorer pour rendre ses doctrines plus convaincantes. L'empiriste rappelle que les mathématiques, comme les autres sciences, sont apprises et qu'à cet apprentissage participe non seulement l'expérience personnelle mais, avant tout, surtout, l'expérience de nombreuses générations depuis les débuts empiriques des mathématiques dans les préoccupations pratiques des égyptiens et des babyloniens et d'autres peuples plus anciens encore, jusqu'à la génération de nos enseignants. Kitcher souligne les aspects sociaux de cette évolution: il y a un acquis transmis par des autorités. Il va peut-être de soi qu'en mathématiques appliquées on fait appel à l'expérience sensorielle pour construire ou trouver des modèles, mais en mathématiques pures? Là non plus, dit Kitcher, on ne peut nier les racines empiriques.

Une tâche importante pour l'épistémologue sensible à l'histoire est celle de montrer comment les imposantes théories modernes se sont développées à partir d'un nombre très réduit de concepts obtenus de l'observation et de la manipulation d'objets naturels. Voulant se détacher de Th. Kuhn et P. Feyerabend, Kitcher prévient qu'il n'est pas relativiste: on peut être attentif aux aspects psychologiques et sociaux d'une science sans pour cela embrasser nécessairement le relativisme. Cet éclaircissement était prévisible, car Kitcher croit à l'évolution et au progrès des sciences, et il essaie de les comprendre, tandis que ce progrès, bien que réel et évident, est pour le relativiste cohérent une fiction ou un mystère. La raison en est que pour le relativiste il n'y a pas de mesure commune, ni rationnelle ni empirique, entre les théories ni entre les concepts de théories différentes, d'où la pluralité de théories et de visions du monde acceptées par le relativiste. La mesure commune permet la comparaison, l'évaluation, le choix, le progrès.

Les critiques de l'apriorisme présentées par Kitcher sont raisonnables et son programme empiriste est *prima facie* attractif, mais sa réalisation paraît difficile. En effet, l'empirisme peut-il remplir le vide de justification, de garantie, laissé par le platonisme? Ou faut-il dire que la justification n'est trouvée nulle part et qu'on doit se contenter d'une science mathématique faillible et hypothétique? Mais ceux qui pensent que les mathématiques sont *a priori* continueront à dire que le rôle joué par la preuve en mathématiques n'est pas identique à celui joué par l'observation ou l'expérience dans les sciences expérimentales: la fonction de la preuve mathématique est positive, elle produit des vérités en acte, tandis que la fonction de l'observation ou de l'expérience est souvent négative, montrer qu'une hypothèse doit être corrigée ; ou bien si le rôle de la vérification par les sens est positif, il rend une hypothèse vraisemblable, non pas vraie.

L'aprioriste insistera sur "le fait" que la perception semble partout incapable de justifier et de rendre compte de l'exactitude des concepts et de la rigueur des sciences formelles. Par exemple, en dessinant un triangle et en considérant ensuite une rotation de 180° dans le plan autour d'un point, on peut suggérer quelques propriétés de la symétrie centrale (en géométrie plane). Mais la perception des dessins ne peut pas justifier ces suggestions car nous ne sommes même pas sûrs d'avoir dessiné des droites ni un triangle. H. Dingler ne serait pas d'accord car, selon lui, les architectes et les maçons, les astronomes et les ingénieurs construisent et utilisent des droites tous les jours. D'autre part, quiconque pense que la géométrie apprise à partir de la perception sensorielle est justifiée doit croire que seule la géométrie euclidienne est naturelle et justifiée. Que deviennent alors les autres géométries ?

Il me semble plus en accord avec les faits de reconnaître que la géométrie est à la fois une science naturelle et une métaphysique *a priori* car nous attribuons à l'univers des structures apprises ou applicables sur un espace local. Il me semble aussi que cette ambiguïté : aspect empirique / aspect *a priori*, rend la géométrie apte à actualiser en nous l'intelligibilité naturelle: étant un art intellectuel, la géométrie possède l'avantage des sciences formelles et exactes, tout en étant sensible au contenu naturel. Mais ce qui peut être vrai de la géométrie, ou de certains de ses éléments, ne l'est pas nécessairement de toute la géométrie ou du reste des mathématiques. L'éclectisme n'est pas rare ni forcément déraisonnable en philosophie mathématique. Comment affirmer que tout découle de l'esprit s'il y a dans certains domaines des axiomes peu intelligibles ou des "monstres" comme les fonctions continues sans dérivée qui montrent que l'intuition peut nous tromper? Comment affirmer que tout vient de l'expérience s'il y a tout un monde de nombres infinis? Il est raisonnable de penser que dans l'élaboration des mathématiques le rationnel et l'empirique collaborent pour exprimer l'intelligibilité naturelle.

5. Le négativisme réfutationniste

On pouvait sans doute s'attendre à ce que le réfutationnisme soit applicable aux sciences empiriques car il est après tout une version de l'empirisme: le faillibiliste, ou mieux : le réfutationniste, fait appel à l'expérience non pas pour prouver, mais pour corroborer et surtout pour réfuter; mais il était moins évident de voir le réfutationnisme à l'œuvre en mathématiques où, d'après la tradition classique, on trouve des vérités nécessaires, exactes et éternelles. Le mérite de Imre Lakatos est d'avoir appliqué les schémas poppériens aux mathématiques.[22] Les preuves engendrent les objections et les objections font grandir les conjectures, ceci dans un mouvement dialectique où preuves et réfutations s'attirent mutuellement parce que chacune peut apporter ce qui manque à l'autre.

D'après les réfutationnistes, les preuves sans objections n'existent pas; la certitude définitive et complète est une illusion. Dans une démonstration il peut y avoir des lemmes triviaux, omis, qui peuvent se révéler faux ou inconsistants. La correction est évidente surtout en mathématiques: les définitions sont claires et leurs déficiences sont rapidement saisies. La critique dévoile que même un énoncé qu'on tenait pour *a priori* et vrai est réfutable; elle peut transformer une preuve en explication. La tâche de la philosophie des sciences n'est ni la

---

[22] Cf. Imre Lakatos, *Proofs and Refutations,* Cambridge U. P., 1976.

recherche des fondements ni la justification, mais l'explication de la croissance de la connaissance. La science progresse, selon K. Popper, grâce à la méthode des preuves et réfutations. Cette façon de faire ressemble au style des médiévaux: la science devient une activité argumentative et les talents du philosophe, ceux du logicien ou de l'avocat. Mais les mathématiciens travaillent-ils comme le décrit ou le prescrit le réfutationniste? La plupart du temps ils construisent des théories guidés par leur imagination et leur connaissance plutôt que par la critique acharnée.

Examinons l'exemple donné par Lakatos, la conjecture d'Euler concernant les polyèdres: soit un polyèdre quelconque, on obtient $S - A + F = 2$, où S est le nombre de sommets, A le nombre d'arêtes et F, le nombre de faces. Prenez un cube: 8 - 12 + 6 = 2, ou une pyramide à base triangulaire: 4 - 6 + 4 = 2. Cette caractéristique est vérifiée pour maints polyèdres, même dans des cas un peu bizarres comme le grand dodécaèdre étoilé: 20 - 30 + 12 = 2. Mais les contre-exemples ne tardèrent pas à apparaître: pour le "hérisson" ou polyèdre étoilé de Kepler constitué de 12 pentagones étoilés, on obtient - 6, à savoir : 12-30+ 2= - 6; ou bien considérez le cadre, bien que polyèdre: $S - A + F = 0$.

Que faire des contre-exemples? La réponse montre la position philosophique adoptée: on constate ainsi la continuité des mathématiques à la philosophie. Selon une version forte du dogmatisme, on doit fonder la science sur des bases solides et justifier ensuite chaque énoncé en utilisant comme paradigme la déduction logique. Plus que la découverte, ce qui compte c'est la certitude et la rigueur de la preuve. La meilleure preuve est analytique, déductive: on ne se contente pas d'expériences mentales, de preuves intuitives. On doit élaborer des théorèmes définitivement et complètement vrais. Les contre-exemples sont des monstres. Il faut soit les écarter, par exemple, en ajoutant des lemmes qui immunisent les hypothèses ou en changeant la signification d'au moins un concept clé, soit montrer qu'ils ne sont pas des contre-exemples.

Le réfutationniste est d'avis qu'il est néfaste d'écarter les contre-exemples: ceux-ci ne sont pas des monstres mais des exceptions qu'il faut prendre au sérieux. Le résultat est qu'on est obligé d'améliorer la conjecture. Supposez que le polyèdre soit défini comme un solide dont la surface est constituée de faces polygonales. Si une objection porte sur le "fait" que le polyèdre est un solide, on peut améliorer la conjecture d'Euler par un tour de topologie: un polyèdre peut être déformé, étiré sur un tableau; il est ainsi une surface constituée d'un système de polygones. Les objections peuvent nous faire restreindre le théorème à certains types de polygones. On voit la difficulté de réfuter une idée: on peut l'améliorer, la rendre plus sophistiquée. On voit aussi l'une des propriétés qui rapproche le réfutationnisme de l'empirisme: l'histoire des sciences est indispensable pour l'épistémologie; même les procédures les plus abstraites semblent avoir été établies sous le feu de la critique.

6. Logicisme, formalisme et intuitionnisme

D'après Frege, les nombres peuvent être définis en termes d'ensembles. Par exemple, "être trois" est une propriété d'une classe, de collections d'objets, ou d'ensembles. "Le nombre 3 est quelque chose que tous les groupes de trois ont en commun, et qui les distingue des autres collections" (B. Russell). Les nombres sont, dans cette perspective, des totalités d'ensembles équivalents, c'est-à-dire des collections dont les éléments peuvent être mis en correspondance biunivoque les uns avec les autres. Vers la fin du XIX^{e} siècle et le début du XX^{e}, la théorie des ensembles créée par Cantor était considérée comme un fondement possible de l'édifice mathématique, mais les mathématiciens se trouvèrent confrontés à des paradoxes, anticipés par Cantor, concernant l'utilisation du quanteur universel (tous). Considérons S , l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d'eux-mêmes et demandons-nous: S est-il élément de lui-même ? S'il n'est pas élément de lui-même, alors il appartient à S (d'après la propriété qui définit S), il y a donc contradiction. Mais si S est un élément de lui-même, et puisque lui-même est S , il appartient à l'ensemble caractérisé par le fait que les éléments ne sont pas éléments d'eux-mêmes : il y a à nouveau contradiction.

Russell avait essayé d'éliminer les paradoxes, mais Hilbert, plus exigeant, voulait une preuve de la consistance des axiomes de l'arithmétique et de toute déduction dérivée d'eux. Il s'agissait de réduire les mathématiques en les emprisonnant dans un tissu bien serré d'interconnexions logiques à partir d'axiomes consistants en suivant des règles de raisonnement précisément prescrites. (Bien que l'axiomatisation apporte des informations sur la cohérence interne ou la rigueur des démonstrations, sa valeur en dehors de la logique pour obtenir des résultats nouveaux est quasiment nulle). On espérait qu'une fois les mathématiques ainsi contrôlées de très près, elles seraient libres de tout problème logique. Hilbert croyait de plus que les difficultés rencontrées par Russell étaient dues au contenu sémantique du langage; il fallait donc vider cette science de toute signification et la réduire à un jeu syntaxique, la consistance logique étant le seul critère requis pour l'existence des mathématiques. De plus, Hilbert croyait pouvoir démontrer la complétude syntaxique de l'arithmétique des nombres entiers et en déduire celle de l'arithmétique des nombres réels. Telle était, en quelques mots, la doctrine formaliste. On connaît les conséquences néfastes pour ce programme des théorèmes de Gödel de 1931: tout système assez fort pour formaliser, dans le cadre du calcul des prédicats de premier ordre, l'arithmétique des entiers naturels comporte un énoncé indécidable. Il y a donc des propositions vraies qu'il est pourtant impossible de prouver à l'intérieur d'un tel système formel. D'autres, par exemple Curry, ont radicalisé le formalisme faisant de l'étude des systèmes formels une fin en soi, alors que chez Hilbert c'était un moyen destiné à prouver la consistance des mathématiques.

Maintenant Lakatos voit dans le formalisme une forme de dogmatisme. Il est caractéristique du formalisme de ne pas tenir compte de l'histoire des mathématiques et d'être incapable d'expliquer leur développement. Le formalisme est attaché au positivisme logique, spécifiquement à son critère de signification: un énoncé a un sens si, et seulement si, il est analytique (tautologique) ou empirique. Or les mathématiques non formelles ne sont ni l'un ni l'autre: elles seraient par conséquent vides de sens, ce que le réfutationniste considère inacceptable.

Le formaliste distingue de façon nette les propositions mathématiques des propositions empiriques, les mathématiques pures des mathématiques appliquées. C'est pourquoi le problème de la relation entre les mathématiques et la nature devient celui des critères de l'acceptabilité d'une théorie en vue de tel ou tel objectif, et le critère le plus répandu, la réussite, étant pragmatique, il se trouve en dehors du domaine mathématique. Il est à l'œuvre, par exemple, dans la physique mathématique. Il ne faut pas voir dans cette réussite un isomorphisme entre structures mathématiques et structures physiques, ou entre les prédicats formels et les notions empiriques. D'un point de vue pragmatique, quelques formalistes, par exemple Curry, critiquent les mathématiques intuitionnistes faisant voir que leur complexité rend leur application difficile. Les systèmes formels, étant vides, peuvent recevoir plusieurs interprétations, mais les raisons profondes de l'application des systèmes formels au monde sensible restent inexpliquées.

Pour les intuitionnistes ou constructivistes modernes, les mathématiques sont une construction d'entités dans l'intuition pure (on se rappelle de Kant). La promesse d'une telle construction, sa possibilité logique, recevables en mathématiques classiques et à l'intérieur du formalisme, sont insuffisantes d'un point de vue intuitionniste. L'être mathématique, pour exister effectivement, doit passer de sa possibilité logique (l'absence de contradiction) à l'acte grâce à l'activité du sujet; les êtres sont des actes et les mathématiques intuitives sont une action, non pas une science (L. E. J. Brouwer).[23] L'infini actuel n'existe pas car une totalité infinie achevée ne correspond à aucun acte humain. Un leitmotiv intuitionniste est que nos capacités cognitives étant limitées, beaucoup de faits que nous croyons connaître ou comprendre nous dépassent.

La preuve d'existence doit être constructive, c'est-à-dire qu'on doit donner la règle de la construction d'une entité, illustrer par des exemples une généralité. C'est pourquoi la preuve intuitionniste est plus exigeante qu'une preuve dite "classique", il y a plus dans la première que dans la seconde et la première est plus satisfaisante car elle donne le droit personnel d'affirmer qu'on est en possession d'un être ou d'une vérité mathématique. Si on peut avoir deux preuves du même être, une constructive et une qui ne l'est pas, il va de soi que la première est préférable. Mais si à un moment donné la seule preuve disponible est non constructive, il est raisonnable de s'en servir. En effet, plus on s'éloigne de l'intuition, plus les preuves constructives deviennent difficiles et plus les preuves classiques sont les bienvenues.

Une preuve non constructive se simplifie la tâche car on y considère qu'il suffit de montrer qu'une entité n'est pas contradictoire pour l'accepter comme existante. Une preuve constructive s'interdit l'appel à la règle de la double négation [$\neg(\neg A) \equiv A$] et au principe logique du tiers exclu [si P est une proposition, alors la proposition « R ou (non R) » est vraie, sans troisième possibilité] au-delà du domaine bien contrôlé des entiers naturels. Quand on suit le tiers exclu, il suffit de montrer qu'une proposition est fausse pour établir que sa contradictoire est vraie et pour supposer que l'entité décrite par celle-ci existe,

---

[23] L. E. J. Brouwer, “Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism”, South African Journal of Science, Oct.-Nov., 1952, p. 142.

même si personne n'a de contact direct et positif avec une telle vérité ou entité. C'est cette supposition qui est inadmissible d'après l'intuitionniste pour qui le vrai est le vrai *effectivement conçu* : sa simple possibilité ne suffit pas.[24] Contrairement au formaliste, l'intuitionniste croit qu'il y a des êtres mathématiques ---les actes du sujet connaissant-- qui ne sont pas de purs signes (formalisme), et l'intuitionniste se trouve ainsi à mi-chemin entre le formaliste et le réaliste car, même si l'intuitionniste croit à des êtres qui sont des actes (réalité psychologique), il ne va pas aussi loin que le réaliste pour qui les êtres sont indépendants de notre conception et existent dans un monde platonicien.

Selon Brouwer, l'intuition mathématique est un acte introspectif, désintéressé, contrairement à la science orientée vers des fins pratiques, expression de la volonté humaine de contrôle de l'environnement. Brouwer n'avait aucun goût pour les mathématiques appliquées. A l'intérieur de l'intuitionnisme, une science naturelle comme la physique mathématique est (i) soit intégrée au domaine des sciences pures où on fait un effort pour montrer que là aussi il y a des théorèmes intuitivement évidents (Kant), (ii) soit une science naturelle faillible et donc dépourvue d'évidence et d'unicité (H. Weyl). Dans les deux cas on essaie de rendre la physique mathématique aussi rationnelle que possible, mais la version de Weyl semble préférable à celle de Kant, entre autres, parce que la physique mathématique contient le concept de mouvement qui présuppose celui de matière, qui n'est pas *a priori*; ensuite l'histoire de la physique montre (par exemple l'apparition des deux théories de la relativité et de la mécanique quantique) qu'il n'est pas raisonnable de tenir une théorie unique (par exemple la physique newtonienne) comme la seule qui soit adéquate au monde sensible. Cela dit, les opinions de Kant et de Brouwer semblent plus en accord avec les thèses traditionnelles de l'intuitionnisme que celles de Weyl,[25] mais leur distinction nette entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées n'est pas de nature à expliquer la constitution d'une science comme la physique mathématique.

---

[24] L. E. J. Brouwer, “Sur le rôle du principe du tiers exclu dans les mathématiques, spécialement en théorie des fonctions », in *Intuitionnisme et théorie de la démonstration*, textes réunis par Jean Largeault, Vrin, Paris, 1992.
[25] Hermann Weyl, *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, éd. Atheneum, N. Y., 1963, p. 50 et s.

7. Le réalisme mathématique et la philosophie de la nature

Le problème principal de la philosophie des mathématiques dans le contexte de la philosophie de la nature est celui de l'application des mathématiques au monde sensible, ou à notre expérience du monde sensible. Là-dessus le néopositiviste ou le formaliste ne voit pas de problème: les mathématiques sont un outil déductif pour l'obtention de conséquences des hypothèses empiriques, tandis que A. N. Whitehead envisage la possibilité pour les mathématiques d'exprimer l'ordre de l'univers. Pour lui, tout n'est pas structure, il y a la matière et ses mystères. Tout n'est pas abstrait: il y a les processus, les contenus concrets. La nature n'est pas seulement mathématique, elle est aussi esthétique. C'est la raison pour laquelle le caractère abstrait des mathématiques met des bornes à leur capacité d'exprimer des vérités sur le monde. Les mathématiques, comme toutes les sciences, rencontrent des limites à leur application. En ce qui me concerne, j'irais plus loin en envisageant l'hypothèse panmathématiste, que Whitehead ne serait pas prêt d'accepter, selon laquelle il y a des mathématiques absolument partout, dans tous les domaines et aspects de l'univers, y compris là où l'homme semble loin de les trouver. « Quiconque saurait expliquer d'une manière convaincante la réalité mathématique aurait résolu la plupart des problèmes les plus difficiles de la métaphysique », écrit Hardy, et il continue : « S'il était capable d'y joindre une explication de la réalité physique, il les aurait tous résolus ».[26] Le panmathématisme est une croyance métaphysique utile en tant que motivation de la recherche, mais évidemment il ne peut pas être prouvé aujourd'hui. L'utilité de cette croyance se voit, par exemple, dans les travaux d'Einstein[27] et plus récemment dans ceux de Thom.

Quoi qu'il en soit, si les mathématiques sont la science de la structure, qu'est-ce que la structure? Comment se présente-t-elle dans l'ensemble des événements et des objets? Si elles expriment l'ordre, qu'est-ce que l'ordre? Si les mathématiques sont la connaissance de l'abstraction pure, qu'est-ce que l'abstraction? Si elles sont la connaissance des relations nécessaires dans le domaine du possible, que sont la nécessité et la possibilité? On a compris: point

[26] G. H. Hardy, *op. cit.*, p. 123.
[27] Voir Emile Meyerson, *La deduction relativiste, Payot*, Paris, 1925.

de philosophie des mathématiques ni de philosophie de la nature sans métaphysique.

Selon Whitehead, les premiers principes et les entités ultimes sont indispensables dans la construction des théories: sans eux, les composants les plus proches de la perception immédiate n'ont finalement pas de sens. La méthode qui justifie la métaphysique est la rétroduction, dit-il, c'est-à-dire la recherche d'hypothèses ou d'une nouvelle théorie exigées par la découverte de phénomènes inexpliqués. L'imagination y joue le rôle central. Il a vu juste car la déduction ne crée pas d'intelligibilité, elle se borne à transmettre celle des axiomes et celle des lois, et l'on ne peut prétendre pouvoir avancer des faits particuliers à la loi, du présent au futur, sans théorie ni hypothèse préconçues, car dans ce cas on ne pourrait même pas commencer une recherche par manque d'outils pour distinguer les données des facteurs sans pertinence.

Whitehead pense que l'abstraction peut être remontée en plusieurs étapes. On commence par la réalité composée d'entités existantes ou actuelles dont font partie les objets éternels. Les objets éternels simples qui entretiennent des relations forment un nouvel objet éternel complexe. Plusieurs de ces objets complexes interconnectés forment un nouvel objet éternel encore plus complexe que le précédent, etc. Ce sont des constructions élaborées dans le domaine du possible: c'est le chemin suivi par les mathématiciens "purs", tandis que les "appliqués" ont intérêt à suivre également le chemin inverse: on essaie de descendre l'échelle de l'abstraction pour toucher le groupe de base composé d'objets éternels simples. On a ainsi la possibilité de décrire la structure formelle des événements. Mais l'approche des entités actuelles est seulement asymptotique puisque les événements évoluent et que leur contingence empêche la nécessité mathématique de les appréhender exactement et complètement.[28]

Les mathématiques, comme la physique et comme toute science, sont une connaissance approximative et faillible, corrigible, mais les mathématiques sont plus parfaites car plus abstraites. Le faillibilisme mathématique n'implique pas que les abstractions soient fictives parce que d'après le pythagorisme whiteheadien les objets éternels sont naturellement connectés aux entités

[28] A. N. Whitehead, *Process and Reality*, Part II, Section I, “Fact and Form”.

existantes. Les mathématiques sont inscrites dans la nature.[29] Elles sont un réservoir de formes sous-jacentes aux processus naturels, idée richement illustrée par Jean Largeault suite aux travaux originaux de René Thom.[30]

J'ai déjà eu l'occasion d'indiquer quelques caractéristiques de l'attitude réaliste indispensables à la philosophie de la nature. Contre l'argument qu'il n'y a pas de rapport biunivoque entre les formules et les processus réels, j'ai fait remarquer que l'analogie naturelle existe, c'est-à-dire l'isomorphisme de deux ou plusieurs processus naturels *prima facie* sans structure commune (par exemple, l'isomorphisme du mouvement du pendule et l'oscillation d'un circuit électrique). Le raisonnement par analogie, forme d'induction, est légitime dans la mesure où il prend appui sur une analogie naturelle. (Le raisonnement par analogie a une structure, une logique, et en ce sens il faut reconnaître, contre l'avis d'une majorité de méthodologues, qu'il existe une logique de la découverte scientifique). Par contre, la cohérence oblige le fictionniste en philosophie des mathématiques à dire que le raisonnement par analogie n'a pas de portée naturelle.

De nombreux savants n'apprécient pas qu'on explique à l'aide de modèles, d'analogies ou de métaphores: Duhem se moque des physiciens anglais pour qui les caractéristiques des modèles semblaient devenir tangibles. Dirac pense que l'essentiel de la science est l'élaboration des lois qui gouvernent les phénomènes et leur application à la découverte. D'Espagnat voit le modèle surtout comme un outil pédagogique pour l'explication des faits difficiles à un public de non spécialistes. Mais ces critiques sont superficielles. Il faut reconnaître que la taxonomie et la recherche des causes s'appuient sur l'analogie, et que l'un des mérites principaux du modèle mathématique, cela a été dit, est de permettre la découverte d'analogies cachées à l'observation.

C'est du point de vue du philosophe de la nature qu'il faut se placer pour apprécier les aspects réels des mathématiques. Les mathématiques sont une science d'observation et de raisonnement abstrait, un domaine où l'empirique et le rationnel collaborent pour que l'on puisse saisir l'intelligibilité naturelle. Cette

---

[29] Cf. par exemple, A. N. Whitehead, *Science and the Modern World,* chap. 2, "Mathematics in the history of thought", et chap. 10, "Abstraction"; *The Concept of Nature,* chap. 4, "The method of extensive abstraction".

[30] R. Thom, *Stabilité structurelle et morphogenèse*, W. A. Benjamin, Inc., 1972, et J. Jean Largeault, *Principes classiques d'interprétation de la nature*, Vrin, 1988.

collaboration est clairement perçue en mécanique rationnelle et en général dans la physique mathématique: à la nécessité et à l'universalité des rapports logico-mathématiques s'unissent les résultats des mesures. Puis pour retrouver le naturel dans les aspects *a priori*, il faut déceler les bases physiques et biologiques des structures fondamentales du langage, de la logique et des mathématiques. Le philosophe de la nature (un réaliste) pense que ces structures ne se sont pas développées par hasard mais grâce à des contraintes physiques et biologiques et que le rôle principal ou premier du langage est de représenter l'environnement physique, biologique, économique pour rendre l'action et la prévision possibles.

Pour développer la philosophie de la nature il faut aller au-delà de certaines distinctions ou idées qui entravent l'étude de la nature telles que la distinction entre les mathématiques pures et les mathématiques appliquées et l'association des mathématiques à la quantité exclusivement. Les pythagoriciens ont rangé toutes les réalités en une dizaine d'oppositions où la moitié sont d'ordre mathématique: limité-infini, impair-pair, un-multiple, droite-gauche, mâle-femelle, repos-mouvement, droit-courbe, lumière-obscurité, bon-mauvais, carré-oblong. Cette table montre que d'après les pythagoriciens, les mêmes mécanismes qui expliquent la réalité mathématique expliquent la réalité physique, biologique et morale et qu'il y a une continuité d'une réalité à l'autre, d'où l'idée, essentielle à la philosophie de la nature, qu'on peut étudier la nature mathématiquement. Nous sommes loin des scrupules exagérés des nominalistes qui veulent séparer le langage de la nature au point de la rendre inintelligible.

Empiristes et réfutationnistes prétendent être les seuls à expliquer la croissance de la connaissance: les premiers font appel au travail accumulé de génération en génération, les autres, aux discussions, à la méthode de conjectures et réfutations. Un réaliste platonicien reconnaît qu'il y a des processus de nature logique, plus profonds que les processus mentionnés par les empiristes et les réfutationnistes, qui rendent la croissance possible. Une grande partie de la recherche d'Albert Lautman explique que le progrès en mathématiques est le résultat de la tension entre des idées opposées, encore plus abstraites que les mathématiques: symétrie-asymétrie, local-global, fini-infini, continu-discret. Selon Lautman, ces idées dialectiques ont une action à l'arrière-plan des mathématiques et sont dominatrices par rapport à cette science: il retrouve la tradition platonicienne.[31]

Contre les conventionalistes radicaux, j'ai mentionné l'idée de Poincaré selon laquelle la vérité se trouve dans ce qui reste inchangé d'une théorie à une autre. Si dans l'évolution d'une théorie ou dans le changement de théorie il y a des équations qui restent, cela signifie qu'on a saisi des rapports réels. De Platon à Poincaré, la constante des critères de vérité et de réalité est l'invariabilité: on considère qu'on a compris la nature quand elle se montre invariable, symétrique, quoi qu'on fasse.

De toutes les attitudes enquêtées, la réaliste est la plus apte à reconnaître la pertinence des mathématiques pour la philosophie de la nature.

* * *

[31] A. Lautman, *op. cit.,* p. 290.