



Les mathématiques du réel

Exemples d'exercices pour les élèves du secondaire et du supérieur,

tirés de nos expériences

Destinataire : APMEP

rédaçtion : Bernard Beauzamy

Juin 2007

1. Les arrêts sur une ligne de bus

Une ligne de bus fait 10 km de long. Le bus roule en moyenne à 20 km/h entre deux arrêts. Supposons que l'on mette un arrêt tous les 200 m, de manière à ce que chacun ait un arrêt près de chez lui : tout le monde est content. On compte deux minutes par arrêt (temps de ralentissement, de déchargement, de chargement, d'accélération). Combien y a-t-il d'arrêts et combien de temps met le bus pour aller d'un terminus à l'autre ? Même question si les arrêts sont tous les 500 m.

Commentaire : on voit ici que l'intérêt général est distinct de la somme des intérêts particuliers.

On peut rendre le modèle plus compliqué en faisant apparaître explicitement les phases de décélération et d'accélération liées à chaque arrêt : cela ne change rien.

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour Veolia Transport.

2. Pollution sur un fleuve

Un fleuve dessert dix villes, entre l'amont et l'aval. Chaque ville rejette une certaine quantité de polluant (mettons du phosphore), et cette quantité est mesurée par une station située immédiatement en aval de chaque ville. Comment définir la pollution moyenne du fleuve ?

Commentaire : ce n'est certainement pas la moyenne des indications des stations, car chaque station répercute l'information de pollution de tout ce qui est en amont.

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour l'Agence Européenne de l'Environnement.

3. Effet de la pluie

Comparer, du point de vue des effets, une pluie de 5 mm par heure pendant une heure et une pluie de 1 mm par heure pendant 5 heures.

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour Veolia Environnement, Région Ouest.

4. Panel de consommateurs

Un industriel vend du sucre en morceaux, par boîte de 1 kg. Il sait que, pour l'année 2008, il aura environ un million de consommateurs, mais il ne sait pas combien de boîtes il vendra. Il interroge 10 000 consommateurs. Parmi ces 10 000,

- 20 % lui disent qu'ils achèteront une boîte par mois au plus ;
- 40 % de deux à cinq ;
- 30 % de six à dix ;
- 10 % plus de dix.

Comment peut-il, à partir de ces informations, reconstituer ses ventes annuelles ?

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour Veolia Environnement, Région Ouest.

5. Problèmes d'incertitudes

Une automobile parcourt 1 km à la vitesse de 60 km/h : elle met donc une minute. Mais si on dit que la distance est $1 \text{ km} \pm 10\%$, que la vitesse est $60 \text{ km/h} \pm 10\%$ et que le temps est une minute $\pm 10\%$, on tombe sur une anomalie. Laquelle ?

6. Problème de visée

Un navire en déplacement rectiligne uniforme voit un phare, à deux moments différents. Compte-tenu des erreurs de visée, on peut admettre que la précision est de $\pm 1^\circ$ de part et d'autre. Quelle position attribuer au phare ? Même question s'il y a trois visées ou davantage.

Commentaire : ce problème est extrêmement difficile. La réponse naturelle est : l'intersection des lignes de visée, quand il n'y en a que deux. Mais cette réponse est fautive. Décomposons chaque angle possible en dix petits secteurs (soit onze visées en tout) ; le phare peut se trouver sur n'importe laquelle des $11^2 = 121$ intersections, avec équiprobabilité (si on admet une équiprobabilité pour chaque secteur et l'indépendance des erreurs de visée). La position la plus probable est alors le barycentre (moyenne arithmétique) des 121 positions, et cela ne coïncide pas avec l'intersection des bissectrices. Voir mon livre "méthodes probabilistes pour l'étude des phénomènes réels".

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour le Service des Programmes de Missiles Tactiques, Délégation Générale pour l'Armement.

7. Trajectoire optimale pour un robot

Un robot nettoyeur de piscine est un véhicule à chenilles, doté d'un gros rouleau nettoyeur, situé devant le robot. On souhaite que le robot passe deux fois en tout point du fond de la piscine, pour être sûr de bien nettoyer celle-ci. Imaginer le trajet du robot, dans le cas d'une piscine rectangulaire.

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour la Société Zodiac.

8. Ramassage des ordures ménagères

Une ville à l'américaine est constituée de 20 rues, orientées est-ouest, et de 30 avenues, orientées nord-sud. Chaque bloc d'immeubles a des sorties dans les quatre directions et dépose des ordures. Imaginer le trajet d'une benne qui doit ramasser toutes les ordures.

On pourra rendre ce problème quantitatif : distance entre rues et avenues, quantité unitaire d'ordures, volume total de la benne. Comment procéder si une benne ne suffit pas ?

Note : Le trajet optimal consiste à passer une fois dans chaque sens dans chaque rue et chaque avenue ; cela n'a rien à voir avec les problèmes de type "voyageur de commerce". De plus, une benne à ordures ne tourne pas à angle aigu.

9. Contrôle d'un réservoir

Un réservoir est alimenté par une source dont le débit est périodique sur 24 heures (on pourra commencer par un exemple simple : 1 litre par heure entre 0 et 8 h, 4 l par heure entre 8 et 16 h, 2 l par heure entre 16 h et 24 h, par exemple). On dispose d'une vanne en sortie, qui permet de faire sortir l'eau comme on veut. Comment agir sur la vanne pour que le débit en sortie du réservoir soit le plus constant possible pendant toute la journée ?

Indication : la constante est évidemment la moyenne journalière des flux d'entrée. Il y a une contrainte sur la capacité du réservoir.

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour le Syndicat Interdépartemental d'Assainissement de l'Agglomération Parisienne ; le débit en sortie doit être constant pour permettre un traitement optimal par les stations d'épuration.

10. Gestion de la production d'électricité

On dispose de plusieurs centrales, par exemple trois. La première peut produire 800 MWh, par tranches de 100 MWh ; la seconde 900 par tranches de 300 et la troisième 1000 par tranches de 500. Le coût de production est 1 Euro du MWh pour la première, 1,2 pour la seconde, 0,9 pour la troisième. On a besoin de produire 1934 MWh. Comment répartir au mieux cette production entre les centrales ?

Issu d'un travail réalisé par la SCM pour EdF.